Exercice 1 *(Baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007, 5 points)*

Soit les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2=2+2\mathrm{i}\quad\text{et}\quad Z=\frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal; on prendra 2 cm comme unité graphique.
   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Exercice 2 *(Baccalauréat Antilles-Guyane, Juin 2000, 5 points)*

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.
   (a) Calculer $P(-1)$.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
   $$P(z)=(z+1)(z^2+az+b).$$
   (c) Résoudre dans C l'équation $P(z)=0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives
   $$z_\mathrm{A}=-1,\ z_\mathrm{B}=2+\mathrm{i}\sqrt{3},\ z_\mathrm{C}=2-\mathrm{i}\sqrt{3}\quad\text{et}\quad z_\mathrm{G}=3.$$
   (a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
   (b) Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{G}-z_\mathrm{C}}$. En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice 3 *(Centres étrangers, Juin 2010)* **5 points**

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a=-1$ et l'application f, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui·même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M'=M$.

$$\text{O}M' = \frac{\text{O}M}{\text{A}M} \text{ et } \left(\vec{u},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{M\text{O}}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. (a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + \text{i}$.

   Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

   (b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B′ image du point B par f.

   Établir que B′ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

   Placer le point B′ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.

   (c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

   (d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.

   En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

   À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).