Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 *(Baccalauréat Amérique du nord, juin 2005)*

1. La fonction f est une fonction rationnelle, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc aussi sur $[0;2]$, et

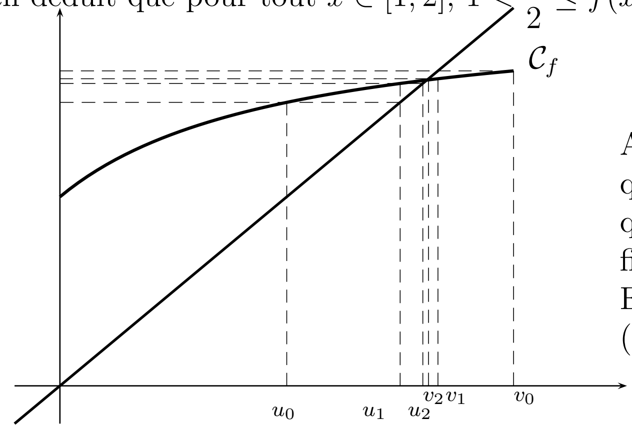
pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$.

x	0 $\qquad$ 2
$f'(x)$	$+$
f	$1 \nearrow \frac{5}{3}$

f est continue et strictement croissante sur $[0;2]$, donc sur $[1;2]$, avec de plus $f(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{2}$.

On en déduit que pour tout $x \in [1;2]$, $1 < \dfrac{3}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{5}{2} < 2$, soit pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.

2. a)



A partir de ce graphique, on peut conjecturer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, et que ces deux suites convergent vers le point fixe l de f : $f(l) = l$.
En d'autres termes, on peut conjecturer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq 2$:
Initialisation : $v_0 = 2$, donc $1 \leq v_0 \leq 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $1 \leq v_n \leq 2$.
Alors, d'après 1., $v_{n+1} = f(v_n) \in [1;2]$, et donc la propriété est vraie aussi au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n \leq 2$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$:
Initialisation : $v_0 = 2$ et $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$, donc $v_1 \leq v_0$, et la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $v_{n+1} \leq v_n$.
Alors, comme d'après ce qui précède, pour tout entier n, $v_n \in [1;2]$ et que d'après 1. f est croissante sur $[1;2]$, $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_{n+1}$, et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Pour tout entier n,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\ &= \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)} = \frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \end{aligned}.$$

On en déduit, par récurrence que pour tout entier n, $v_n - u_n \geq 0$:
Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons que $v_n - u_n \geq 0$, alors, comme $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$, et $u_n + 1 > 0$ et $v_n + 1 > 0$, on end déduit que $v_{n+1} - u_{n+1}$ est aussi positif, c'est-à-dire que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $v_n - u_n \geq 0$.

De plus, d'après 2.b), pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$, d'où, $4 \leq (u_n+1)(v_n+1) \leq 9$.
Ainsi, $\dfrac{v_n-u_n}{9} \leq \dfrac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{v_n-u_n}{4}$,

soit, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, alors, on en déduit d'après 2.c) que, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n) \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$, et ainsi la propriété est encore vraie au rang $n+1$. Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) D'après 2.b), on sait que (v_n) est décroissante et que (u_n) est décroissante.

De plus, d'après la question précédente, on sait que pour tout entier n, $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Finalement, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et elles convergent donc vers une même limite α.

De plus, comme pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$, on sait aussi que $\alpha \in [1;2]$. f étant continue sur $[1;2]$, on sait d'après le théorème du point fixe que (u_n) converge vers α tel que $f(\alpha) = \alpha$, soit

$f(\alpha) = \alpha \iff \dfrac{2\alpha+1}{\alpha+1} = \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Comme la première racine est négative et que $\alpha \in [1;2]$, on en déduit que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2

1. Pour avoir une tangente commune, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ doivent déjà avoir un point commun.

Si $M(x;y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de Cg, $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$, alors, $y = f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff x^2 - x + 4 = 6 - \frac{4}{x+1} \\ &\iff (x^2 - x + 4)(x+1) = 6(x+1) - 4 \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Soit $P(x) = x^3 - 3x + 2$; $x = 1$ est une racine évidente de P, et donc P se factorise par $(x-1)$: $P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$.

$x = 1$ est aussi une racine évidente du trinôme du second degré $x^2 + x - 2$, dont la deuxième racine est donc $x = -2$ (car le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = -2$).

On en déduit donc que $P(x) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$, et donc

$P(x) = 0 \iff f(x) = g(x) \iff x = 1$ ou, $x = -2$

De plus, $f(-2) = g(-2) = 10$ et $f(1) = g(1) = 4$.

On en déduit donc que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersection $A(-2;10)$ et $B(1;4)$.

Le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé de la fonction :

en A, $f'(-2) = -5 \neq g'(-2) = 4$, donc les tangentes à $\mathcal{C}_f$ et Cg n'ont pas le même coefficient directeur et ne sont donc pas confondues.

en B, $f'(1) = 1 = g'(1)$; L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x+3$, et l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ est $y = g'(1)(x-1) + g(1) = x+3$.

Cf et Cg ont donc une tangente commune en $B(1;4)$ qui a pour équation $y = x+3$.

2. **Etude de f** f est un trinôme du second degré donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, $f'(x) = 2x - 1$.

f étant un polynôme, ses limites en l'infini sont celles de son terme de plus haut degré : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

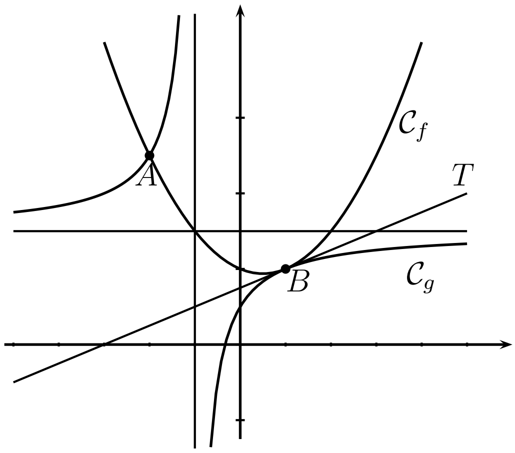
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Etude de g g est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x+1} = 0$, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 6$, et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 6$,

$\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty$, et de même, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$,

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
g	6	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	6



On en déduit que la droite d'équation $y = 6$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et $+\infty$, et que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3

1. . P : Montrons par récurrence que P est vraie.
Pour tout entier $n > 1$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>Initialisation :</u> pour $n = 2$, $f(x) = x^2 = x \times x$ a pour dérivée $f'(x) = 1 \times x + x \times 1 = x + x = 2x$, soit aussi $f'(x) = 2x^{2-1}$, donc P est vraie pour $n = 2$.
<u>Hérédité :</u> Supposons que P soit vraie pour un certain entier n : $f(x) = x^n$, et $f'(x) = nx^{n-1}$.
Soit alors $g(x) = x^{n+1}$. On a $g(x) = x\,x^n = x\,f(x)$, et donc, en dérivant ce produit :
$g'(x) = 1\,x^n + x\,f'(x) = x^n + nx\,x^{n-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence,
soit encore $g'(x) = x^n + nx^n = (n+1)n^n = (n+1)x^{(n+1)-1}$. Donc P est encore vraie au rang $n + 1$.

On en déduit donc, d'après le principe de récurrence, que la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

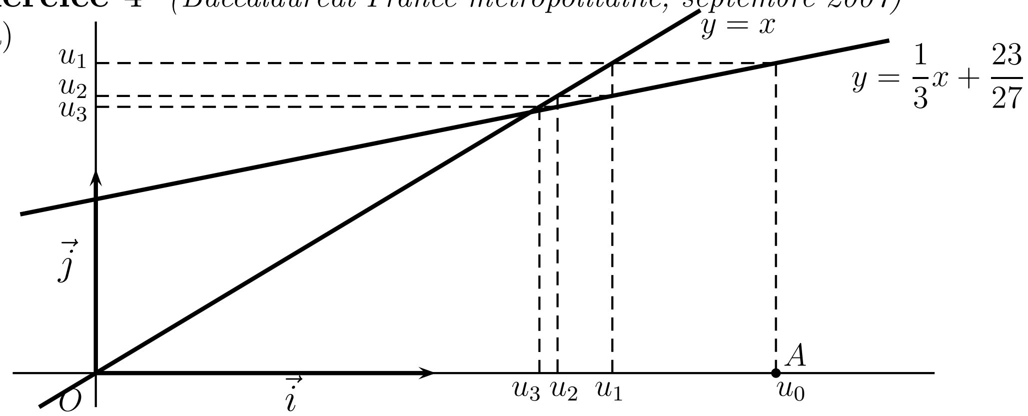
Q : La démonstration par récurrence précédente peut être entièrement reprise. Une autre méthode, plus rapide, consiste à utiliser la dérivée de fonctions composées : $f = u^n = v \circ u$, où $v : x \mapsto x^n$, de dérivée $v'(x) = nx^{n-1}$ d'après la propriété P précédente.
Alors, $f' = u' \times v' \circ u = u' \times nu^{n-1} = nu'u^{n-1}$, et donc la propriété Q est vraie.

2. a) Pour tout x de $]-\pi;0[$, $h'(x) = \cos'(x)g'(\cos(x)) = -\sin(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \dfrac{-\sin(x)}{\sqrt{\sin^2(x)}}$.
Or, pour $x \in]-\pi;0[$, $\sin(x) < 0$, d'où, $\sqrt{\sin^2(x)} = -\sin(x)$, d'où, <u>pour tout $x \in]-\pi;0[$, $h'(x) = 1$.</u>

b) D'après ce qui précède, on en déduit que $h(x) = x + c$, où c est un nombre réel quelconque.
De plus, $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$, et comme, d'après l'expression précédente,
$h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + c = 0$, on en déduit que $c = \dfrac{\pi}{2}$, et donc que, <u>pour tout $x \in]-\pi;0[$, $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.</u>

Exercice 4 *(Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2007)*

1. a)



b) Pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, $l = \dfrac{1}{3}l + \dfrac{23}{27}$, soit $\dfrac{2}{3}l = \dfrac{23}{27}$, et donc, <u>$l = \dfrac{23}{18}$</u>.

c) On veut démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

<u>Initialisation.</u> $u_0 = 2 \geq \dfrac{23}{18}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un entier n, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.
Alors, $\dfrac{1}{3}u_n \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$, et donc, $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geq \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18} + \dfrac{23}{27} = \dfrac{23}{27} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{18}$, ainsi, $u_{n+1} \geq \dfrac{23}{18}$.

La propriété est donc encore vraie au rang $n+1$.

On a donc montrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

D'après la question précédente, $u_n \geq \dfrac{23}{18}$, et donc, $-\dfrac{2}{3}u_n \leq -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{23}{18} = -\dfrac{23}{27}$.

On en déduit finalement que $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \leq -\dfrac{23}{27} + \dfrac{23}{27} = 0$, et ainsi que la suite (u_n) est décroissante.

Comme elle est de plus, d'après la question précédente minorée par $\dfrac{23}{18}$, elle est donc convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$, qui ne peut donc être que celle trouvée au b) : la suite (u_n) converge vers $l = \dfrac{23}{18}$.

2. a) Il s'agit de la somme des $n-1$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $\dfrac{1}{10^2}$, ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10^2}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b) Pour tout entier n, $v_n = 1,277\cdots7 = 1,2 + 7.10^{-2} + 7.10^{-3} + \cdots + 7.10^{-(n+1)}$,

soit, $v_n = 1,2 + 7\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \cdots + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right) = 1,2 + \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$, d'après a).

De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n) = 1,2 + \frac{1}{90} = \frac{12}{90} + \frac{1}{90} = \frac{23}{18}$.

La limite de la suite (v_n) est donc le nombre rationnel $\dfrac{23}{18}$.

3. Pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = 0,00\cdots7 = 7.10^{n+1}$, donc la suite v est croissante. De plus la suite u est décroissante d'après 1.d).

Les suites u et v ont la même limites $\dfrac{23}{18}$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Les suites u et v sont donc adjacentes.

Exercice 5 *(Baccalauréat La Réunion, juin 2008, 5 points)*

1. a) $u_1 = \left(1 + \dfrac{2}{1}\right)u_0 + \dfrac{6}{1} = 3 \times 5 + 6 = 21$.

b) Les premiers termes de la suite (d_n) sont : $d_0 = 16$, $d_1 = 24$, $d_2 = 32$, $d_3 = 40$, $d_4 = 48$, $d_5 = 56$.
A partir de ces premiers termes, on peut conjecturer que (d_n) est une suite artithmétique de raison $r = 8$ et de premier terme $d_0 = 16$.

2. La somme des n premiers termes de la suite arithmétique (v_n) est :
$v_0 + v_1 + v_2 + \cdot + v_{n-1} = n\dfrac{v_0 + v_{n-1}}{2} = n\dfrac{16 + 16 + (n-1)8}{2} = n\left(16 + (n-1)4\right) = 4n^2 + 12$.

3. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5 = 4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5$, donc la relation est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$, alors,
$u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)u_n + \dfrac{6}{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)\left(4n^2 + 12n + 5\right) + \dfrac{6}{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence, et donc,

$$u_{n+1} = \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6}{n+1} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1}$$

or, $4n^3 + 24n^2 + 41n + 21 = (n+1)(4n^2 + 20n + 21)$, d'où, $u_{n+1} = 4n^2 + 20n + 21$.
De plus, $4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 = 4n^2 + 20n + 21$, et donc, $u_{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5$, ce qui montre que l'expression est encore vraie au rang $n+1$.
On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Pour tout entier n, $d_n = u_{n+1} - u_n = \left[4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5\right] - \left[4n^2 + 12n + 5\right]$, soit $d_n = \left[4n^2 + 20n + 21\right] - \left[4n^2 + 12n + 5\right] = 8n + 16$, qui est bien l'expression d'une suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.