Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un RON. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=u\vec{k}$ et $\vec{AN}=v\vec{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. a) Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2=4$.
   b) Dans le cas où la droite (MN) est tangente à $\mathcal{S}$, calculer les coordonnées du point de contact.

Correction :

1. $\mathcal{S} : x^2+(y-1)^2+z^2=1$.
2. a) $M(0;0;u)$; $N(v;2;0)$
   b) La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}(v;2;-u)$ et passe par le point N :

$$(MN) : \left\{\begin{array}{l} x=vt \\ y=2t \\ z=u-ut=u(1-t) \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$$

3 a) Les coordonnées du point d'intersection de (MN) et $\mathcal{S}$ vérifient, lorsqu'ils existent, l'équation paramétrique de (MN) et l'équation de $\mathcal{S}$, soit,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : x^2+(y-1)^2+z^2=1 &\iff v^2t^2+(2t-1)^2+u^2(1-t)^2=1 \\ &\iff t^2(v^2+u^2+4)-2t(2+u^2)+u^2=0\end{aligned}$$

(MN) est tangente à $\mathcal{S}$ si et seulement si (MN) et $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection, soit, si et seulement si l'équation du second degré précédente admet une unique solution, c'est-à-dire si son discriminant est nul : $\Delta=4(2+u^2)^2-4(v^2+u^2+4)u^2=4(4-u^2v^2)=0$
Ainsi, (MN) et $\mathcal{S}$ sont tangents si et seulement si $u^2v^2=4$.

b) On a alors $\Delta=0$ et l'unique solution du trinôme est : $t=\dfrac{2(2+u^2)}{2(u^2+v^2+4)}$.
On obtient alors directement les coordonnées du point de contact en remplaçant cette valeur de t dans l'équation paramétrique de (MN).

Exercice 2 **ROC** *(D'après Bac 2005)*

Partie A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace. On note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points K et L.

Partie B. Dans un RON, on considère les points $A(4;0;-3)$, $B(2;2;2)$, $C(3;-3;-1)$ et $D(0;0;-3)$.

1. Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x-4y-10z-13=0$.
   On admet par la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations :
   $$2x-10y-6z-7=0 \quad \text{et,} \quad 3x-3y+2z-5=0$$
2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
3. En utilisant la partie A, démontrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère $\mathcal{S}$ de centre E.
   $\mathcal{S}$ est la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Quel est le rayon de cette sphère ?

Correction : **Partie A**

Soit $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[KL]$, et M un point quelconque de $\mathcal{P}$.
On a alors,

$$\begin{aligned} MK^2-ML^2=\overrightarrow{MK}^2-\overrightarrow{ML}^2 &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IL}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2 \\ &= \left(MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IL}+IL^2\right)-\left(MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IK}+IK^2\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{IK}\right)=0 \end{aligned}$$

car I est le milieu de $[KL]$.
Ainsi, $MK^2=ML^2 \iff ML=MK$.
On en déduit donc que tout poit M de $\mathcal{P}$ est équidistant de K et L.

Partie B

1. Le plan médiateur de $[AB]$ est orthogonal (AB), donc a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(-2;2;5)$.
   Ce plan médiateur a donc une équation de la forme : $-2x+2y+5z+d=0$.
   Le milieu I de $[AB]$ appartient à ce plan, et a pour coordonnées $I(3;1;-\frac{1}{2})$, et donc, $-2\times 3+2\times 1-5\times\frac{1}{2}+d=0 \iff d=\frac{13}{2}$.
   Ce plan a donc pour équation : $-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$, ou encore, en multipliant par (-2), $4x-4y-10z-13=0$.
2. Le point d'intersection E appartient au trois plans, et ses coordonnées vérifient donc le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x &-& 4y &-& 10z &-& 13 &=& 0 \\ 2x &-& 10y &-& 6z &-& 7 &=& 0 \\ 3x &-& 3y &+& 2z &-& 5 &=& 0 \end{array}\right.$$
   qui a pour solution $\left(x=2;y=0;z=-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. D'après la partie A, on sait que E est équidistant de A et B, car il est sur le plan médiateur de $[AB]$. De même E est équidistant de B et C, et de C et D.
   On en déduit que E est équidistant de A, B, C et D, et donc que A, B, C et D sont sur une sphère $\mathcal{S}$ de centre E.
   Le rayon de la sphère est $R=AE=\sqrt{(-2)^2+0^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$