Devoir de mathématiques

Exercice 1 *Chute d'un corps avec résistance de l'air*

On laisse tomber un corps de masse m dans le champ de la pesanteur. La vitesse v du centre d'inertie de ce corps est fonction du temps t de chute, et satisfait à la loi : $mv' = mg - kv$, où $k > 0$ est le coefficient de freinage et g l'accélération de la pesanteur.

a) Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ (Indication : quelle est la dérivée de la fonction exponentielle en 0 ?)

b) Résoudre l'équation différentielle ci-dessus.

c) On suppose qu'une vitesse initiale v_0 est imprimée à l'instant $t = 0$ au corps.
Montrer que la vitesse $v(t)$ a pour expression :

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

d) Que peut-on dire de la vitesse de ce corps lorsque k tend vers 0 (c'est-à-dire sans résistance de l'air) ?
Quelle loi de la physique retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 2 *(Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2008, 3 points)*

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2 .$$

1. a) Démontrer que, si f est solution de (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 8$.
   b) Démontrer que, si h est solution de (E'), alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(-\frac{1}{2}; 0)$? Si oui, la préciser.

Exercice 3 *(Baccalauréat Pondichéry, Avril 2008, 7 points)*

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : un modèle discret Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0 \ ; \ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[0 \ ; \ 20]$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0 \ ; \ 20]$, $f(x) \in [0 \ ; \ 10]$.

(c) On donne en annexe en fin d'énoncé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

   $$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

ANNEXE

À rendre avec la copie