Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de frations irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).

   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$

   c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

   d) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n, $0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

   e) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 Soit f la fonction numérique définie par l'expression $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.
Dresser le tableau de variations de f, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 3

Partie I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Etudier les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition.
   En déduire l'existence de deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
7. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.