Exercice 1 Dans une foire, une publicité annonce : « *Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets !* ».

Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A Un jour, cents billets sont mis en vente. Xavier en achète deux.

Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant (donner le résultat sous forme de fraction).

Partie B Un autre jour, $2n$ billets sont mis en vente (n est un entier naturel).

Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n qu'il achète au moins un billet gagnant est : $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
2. Calculer p_1 et expliquer ce résultat.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{3}{4} \leqslant p_n \leqslant 1$.

Partie C Tous les jours, $2n$ billets sont mis en vente (n est un entier naturel non nul).

Xavier revient chaque jour, pendant 3 jours, acheter deux billets.

1. Quelle est la probabilité q_n qu'il obtienne, au cours de ces 3 jours, au moins un billet gagnant ?
2. Etudier la limite de la suite (q_n).

Exercice 2 On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^3 f(t)\,dt \ ; \quad J = \int_{-5}^{-2} f(t)\,dt \ ; \quad K = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

   Pour une seule de ces intégrales on peut affirmer qu'elle est positive, et pour une seule on peut affirmer qu'elle est négative.

   Préciser ces deux intégrales et justifier ce choix.

2. A l'aide des informations contenues dans le tableau de variation de f, donner un encadrement par des nombres entiers des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 f(t)\,dt \ ; \quad B = \int_1^2 f(t)\,dt$$

3. On définit, pout tout réel x, la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

   a. Déterminer deux entiers naturels a et b tels que $a \leqslant F(2) \leqslant b$.

   b. Etudier la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.

   c. Etudier le sens de variation de la fonction F.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$.

   a. Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b et c tels que (E) s'écrive : $(z-4)(az^2 + bz + c) = 0$.

   b. Résoudre l'équation (E). On notera z_0, z_1 et z_2 ses solutions, z_1 étant sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
   Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.

   c. Démontrer que les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

2. On considère la transformation f du plan qui à tout point $M(z)$, distinct de O, associe le point $M'(z')$ tel que
$$z' = \frac{1}{\overline{z}} \ .$$

   a. Déterminer l'ensemble des points M invariants par f.

   b. Démontrer que, pour tout point M distincts de O, les points O, M et M' sont alignés et que $OM \times OM' = 1$.

   c. Calculer les affixes des points M'_0, M'_1 et M'_2 images par f des points $M_0(4)$, $M_1(2+2i)$ et $M_2(2-2i)$.
   Placer les points M'_0, M'_1 et M'_2 sur la figure.

3. Le but de cette question est d'étudier l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la transformation f.

   a. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul, on a :
$$|z-2| = 2 \iff \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'| \ .$$

   b. En déduire l'image $\mathcal{D}$ du cercle $\mathcal{C}$ par la transformation f.
   On donnera une équation de $\mathcal{D}$ et on la tracera.