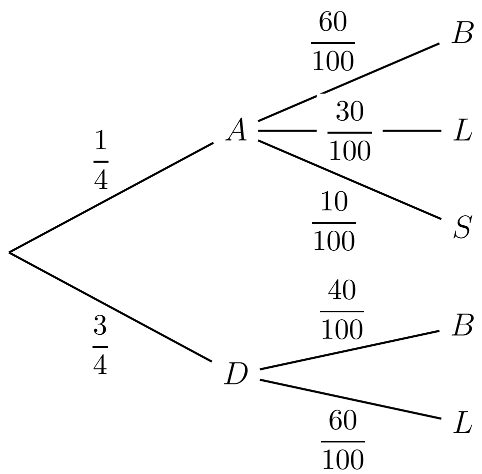
Baccalauréat S - Nouvelle Calédonie

Mars 2016

Exercice 1 ——— **Commun à tous les candidats** ——— **6 points**

Partie A

1. On peut représenter les données de l'exercice sous forme d'un arbre pondéré :



   (a) L'événement « la médaille tirée est argentée et représente le château de Langeais » est $A \cap L$.
   $P(A \cap L) = P(A) \times P_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{30}{100} = \frac{3}{40}$

   (b) On cherche $P(L)$; d'après la formule des probabilités totales :
   $P(L) = P(A \cap L) + P(D \cap L) = P(A) \times P_A(L) + P(D) \times P_D(L) = \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{60}{100} = \frac{3}{40} + \frac{18}{40} = \frac{21}{40}$

   (c) Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, la probabilité que celle-ci soit dorée est $P_L(D)$:
   $$P_L(D) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{10}}{\frac{21}{40}} = \frac{\frac{18}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

2. Il n'y a pas de médaille dorée représentant le château de Saumur donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est de 1.

Partie B Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre $9,9$ et $10,1$ grammes. On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,06$.

   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».

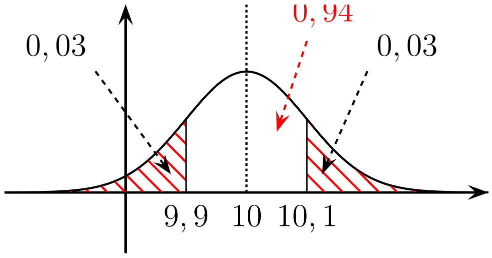
   La probabilité qu'une médaille soit conforme est $P(C) = P(9,9 \leqslant X \leqslant 10,1)$ et la probabilité qu'une médaille soit non conforme est $P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C)$.

   D'après la calculatrice, $P(C) = P(9,9 \leqslant X \leqslant 10,1) \simeq 0,904$. Donc $P\left(\overline{C}\right) \simeq 0,096$.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

   a) Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y - 10}{\sigma}$.
   D'après le cours, on peut dire que la variable Z suit la loi normale centrée réduite.

b) Cette machine produit 6 % de pièces non conformes, ce qui veut dire que $P\left(\overline{C}\right) = 0,06$.
Une médaille est non conforme si $(Y < 9,9)$ ou $(Y > 10,1)$; la variable aléatoire Y est de moyenne 10 donc, par symétrie, $P(Y < 9,9) = P(Y > 10,1)$.
Il faut donc chercher l'écart type σ pour que $P(Y < 9,9) = \dfrac{0,06}{2}$, autrement dit pour que $P(Y < 9,9) = 0,03$.



$Y < 9,9 \iff Y - 10 < 9,9 - 10 \iff \dfrac{Y-10}{\sigma} < \dfrac{9,9-10}{\sigma} \iff Z < \dfrac{-0,1}{\sigma}$ car $\sigma > 0$

Donc $P(Y < 9,9) = 0,03 \iff P\left(Z < -\dfrac{0,1}{\sigma}\right) = 0,03$ où Z suit la loi normale centrée réduite.
On cherche β tel que $P(Z < \beta) = 0,03$ à la calculatrice, et on trouve $\beta \approx -1,8808$.
Donc $-\dfrac{0,1}{\sigma} = -1,8808 \iff \sigma \approx 0,053$
Pour que la machine M_2 produise 6 % de pièces non conformes, il faut que $\sigma \simeq 0,053$.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

On cherche les abscisses des points d'intersection A et B entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, qui sont solutions de l'équation $f(x) = g(x) \iff \ln(x+1) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x) \iff \cos(x) = 1 \iff x = k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ dans $]0\,;16[$ sont 0, 2π et 4π.
On en déduit que $x_A = 2\pi$ et $x_B = 4\pi$.
L'aire de la première surface hachurée, à gauche, est donnée par $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} [g(x) - f(x)]\,dx$,

et l'aire de la deuxième surface hachurée, à droite, est donnée par $\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} [g(x) - f(x)]\,x$

Pour tout x réel, $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$ qui a pour primitive $x \longmapsto x - \sin(x)$.
$\mathcal{A}_1 = [x - \sin(x)]_0^{2\pi} = [2\pi - \sin(2\pi)] - [0 - \sin(0)] = 2\pi$
$\mathcal{A}_2 = [x - \sin(x)]_{2\pi}^{4\pi} = [4\pi - \sin(4\pi)] - [2\pi - \sin(2\pi)] = 4\pi - 2\pi = 2\pi$
Les deux surfaces hachurées sur le graphique ont donc la même aire égale à 2π.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats — 6 points

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation $\dfrac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \dfrac{1}{2}mz - 3 = 0$.

1. Le point A$(1\,;1\,;1)$ appartient au plan P_m si et seulement si $\dfrac{1}{4}m^2x_{\mathrm{A}} + (m-1)y_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{2}mz_{\mathrm{A}} - 3 = 0 \iff \dfrac{1}{4}m^2 + (m-1) + \dfrac{1}{2}m - 3 = 0 \iff \dfrac{1}{4}m^2 + \dfrac{3}{2}m - 4 = 0 \iff m^2 + 6m - 16 = 0$
$\Delta = 36 + 64 = 100$ donc cette équation admet 2 solutions $m' = \dfrac{-6+10}{2} = 2$ et $m'' = \dfrac{-6-10}{2} = -8$.
Le point A appartient au plan P_m pour $m = 2$ ou $m = -8$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$.

   Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.

   On cherche l'intersection de ces deux plans :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12 & = & 0 \\ 4x-5y-2z-3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2z \\ -5y & = & -4(12-2z)+2z+3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2z \\ -5y & = & -48+8z+2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2z \\ -5y & = & -45+10z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2z \\ y & = & 9-2z \end{array}\right.$$

   En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

3. a) Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$.

   Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \\ -y-3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2t \\ -3 & = & 9-2t \\ z & = & t \\ y & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12-2t \\ t & = & 6 \\ z & = & t \\ y & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -3 \\ z & = & 6 \\ t & = & 6 \end{array}\right.$$

   L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point $B(0\,;\,-3\,;\,6)$.

   b) Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\dfrac{1}{2}mz-3=0$.

   On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :

   $\dfrac{1}{4}m^2x_{\text{B}}+(m-1)y_{\text{B}}+\dfrac{1}{2}mz_{\text{B}}-3=0+(m-1)(-3)+\dfrac{1}{2}m\times 6-3=-3m+3+3m-3=0$

   Donc le point B appartient au plan P_m, quelle que soit la valeur du réel m.

   c) Soit H $(a\,;\,b\,;\,c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m.

   Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :

   $\dfrac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\dfrac{1}{2}mc-3=0$

   On donne à m des valeurs particulières :

   - Pour $m=0$, on obtient $-b-3=0$ donc $b=-3$.
   - Pour $m=2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3=0$, soit $a+c=6$.
   - Pour $m=-2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3=0$, soit $a-c=-6$.

   On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c & = & 6 \\ a-c & = & -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & 0 \\ a+c & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ c & = & 6 \end{array}\right.$

   Le point H a donc pour coordonnées $H(0\,;\,-3\,;\,6)$ donc c'est le point B.

   Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

   Autre méthode géométrique :

   L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.

   On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).

   On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.

   Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.

   Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10\leqslant m\leqslant 10 \text{ et } -10\leqslant m'\leqslant 10$$

   On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a) Le plan P_1 a pour équation $x + 2z - 12 = 0$ donc pour vecteur normal $\vec{n_1}\ (1\,;\,0\,;\,2)$.
Le plan P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\vec{n_{-4}}\ (4\,;\,-5\,;\,-2)$.
$\vec{n_1} \cdot \vec{n_{-4}} = 1 \times 4 + 0 + 2 \times (-2) = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.
Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

b) Le plan P_m a pour équation $\dfrac{1}{4}m^2 x + (m-1)y + \dfrac{1}{2}mz - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\vec{n}\ \left(\dfrac{1}{4}m^2\,;\,m-1\,;\,\dfrac{1}{2}m\right)$.
Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\dfrac{1}{4}m'^2 x + (m'-1)y + \dfrac{1}{2}m'z - 3 = 0$ donc pour vecteur normal $\vec{n'}\ \left(\dfrac{1}{4}m'^2\,;\,m'-1\,;\,\dfrac{1}{2}m'\right)$.
les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :

$$P_m \perp P_{m'} \iff \vec{n} \perp \vec{n'} \iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \iff \frac{1}{4}m \times \frac{1}{4}m' + (m-1)(m'-1) + \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m' = 0$$
$$\iff \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\,(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0$$

c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $(mm')^2 + 16(m-1)\,(m'-1) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m\,;\,m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels $\left(\dfrac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)\,(m'-1) + \dfrac{mm'}{4} = 0$, c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$.
Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\ ;\ -4)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(-4\ ;\ 5)$.
Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$(-4\ ;\ 1)\,;\,(-4\ ;\ 5)\,;\,(0\ ;\ 1)\,;\,(1\ ;\ -4)\,;\,(1\ ;\ 0)\,;\,(5\ ;\ -4)$$

Exercice 4______Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ______5 points

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout n, par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \imath\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a) $\left|1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$ donc $\left|1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$

On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

On a donc $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $z_1 = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = \left(1+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times 1 = 1+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. a) Soit P_n la propriété $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

— Pour $n=0$: $z_0 = 1$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$; donc P_0 est vraie.

— On suppose P_p vraie pour $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $z_p = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p e^{ip\frac{\pi}{6}}$

$z_{p+1} = \left(1+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_p = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^p e^{\imath p\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p+1} e^{\imath(p+1)\frac{\pi}{6}}$

— La propriété es vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

b) Les points O d'affixe 0, et A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont situés sur l'axe des réels ; donc les points O, A_0 et A_n sont alignés si le point A_n est sur l'axe des réels, autrement dit si son affixe est réelle, donc si son argument vaut $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z_n est $n\dfrac{\pi}{6}$; on doit donc avoir : $n\dfrac{\pi}{6} = k\pi$ ce qui équivaut à $n = 6k$.

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 6.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ donc d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1} : $d_n = A_nA_{n+1}$

b) $d_0 = z_1 - z_0 = \left|1+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|\imath\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) Pour tout entier n, $z_{n+2} = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1}$ et $z_{n+1} = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$, et alors, en soustrayant ces deux égalités, on obtient $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

d) On en déduit que :

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}d_n$$

On sait que $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc on peut dire que la suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et ainsi que pour tout entier n, $d_n = d_0 q^n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4. a) D'après les questions précédentes, pour tout n :

$|z_n| = \left|\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \left|e^{in\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $|z_n|^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

De même $|z_{n+1}| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ donc

$|z_{n+1}|^2 = \left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ donc $d_n^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

$|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = |z_{n+1}|^2$

b) On sait que $|z_{n+1}| = OA_{n+1}$, que $|z_n| = OA_n$ et que $d_n = A_nA_{n+1}$
Donc $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$ équivaut à $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

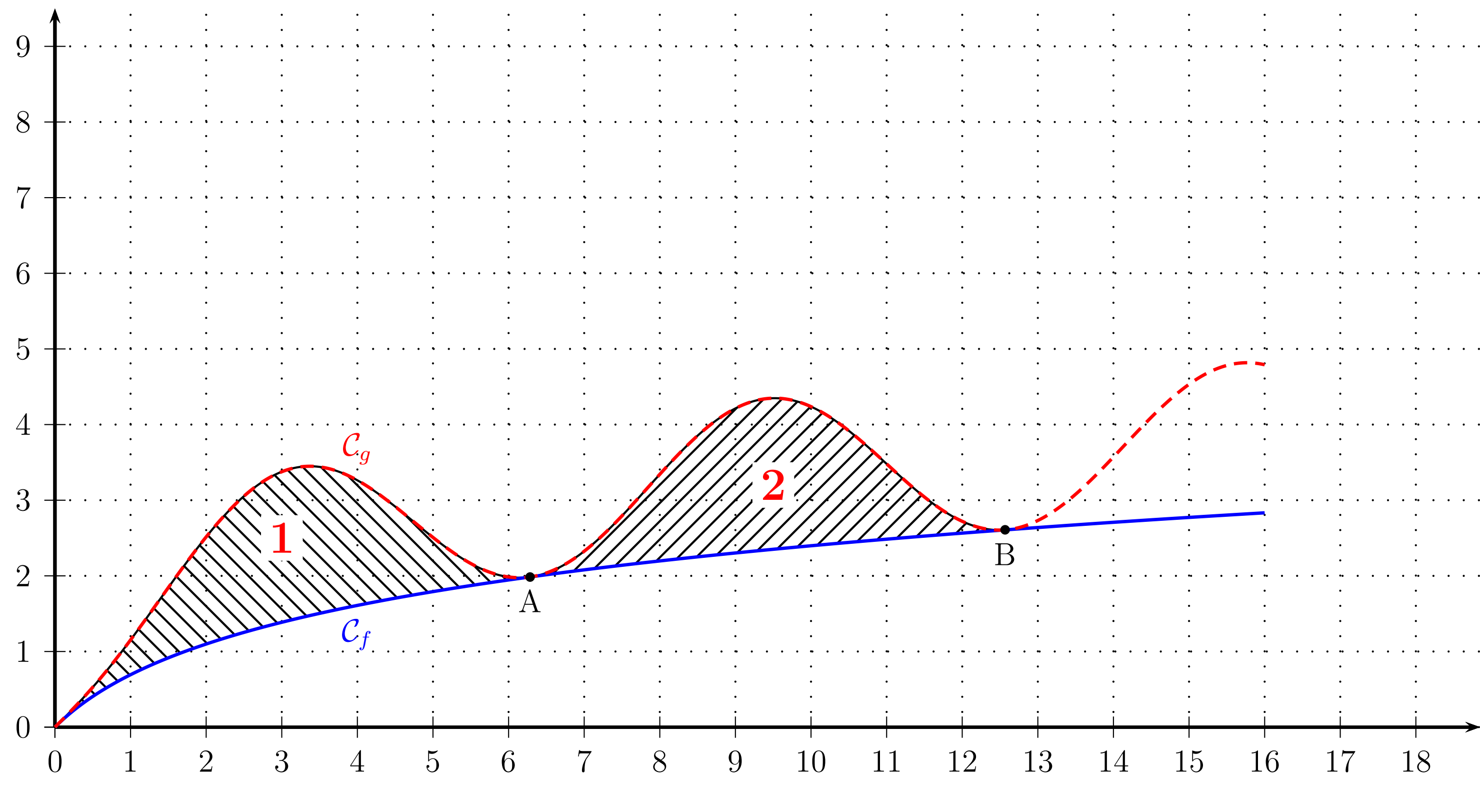
c) Voir construction de A_5 en annexe.

d) — Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le point A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On trace cette perpendiculaire d comme médiatrice du segment ayant pour extrémités deux points i et j de la droite (OA_4) symétriques autour de A_4. (voir la figure)

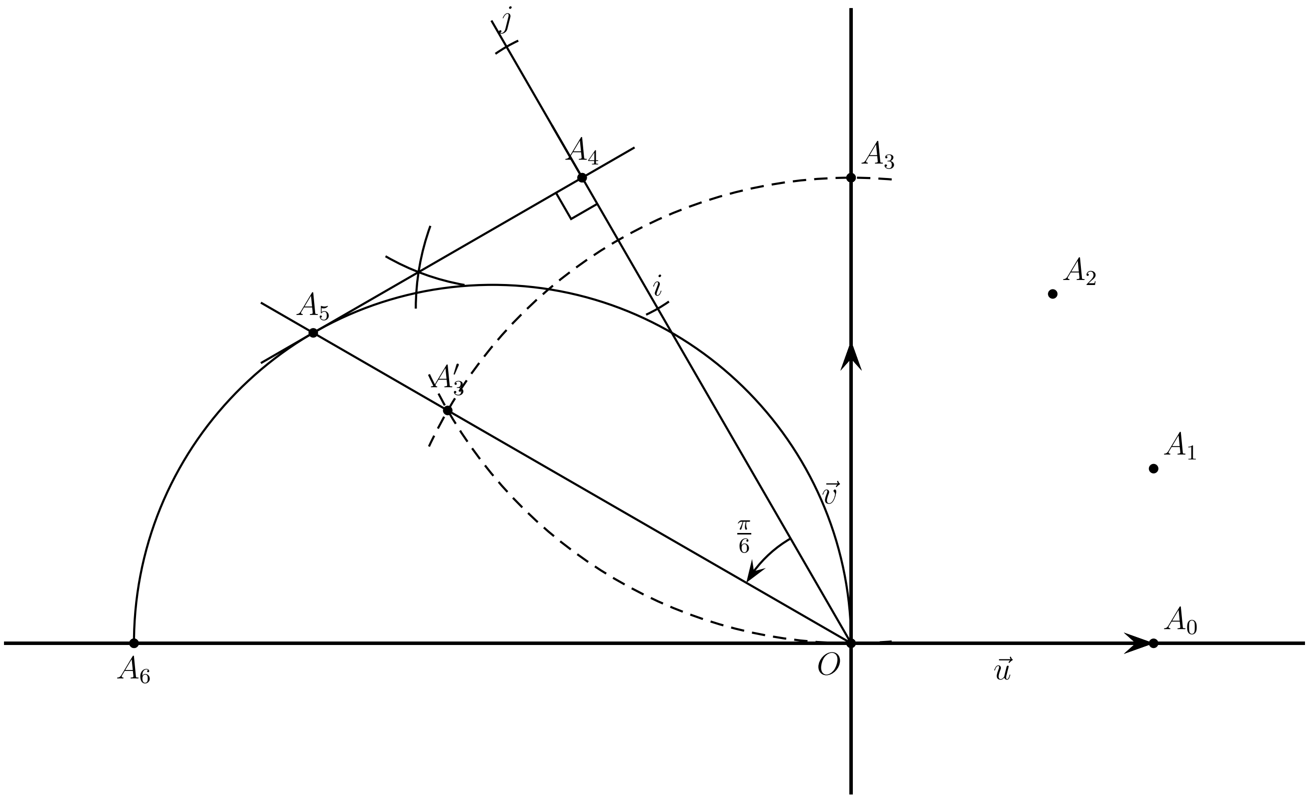
— z_5 a pour argument $\dfrac{5\pi}{6}$ et z_3 a pour argument $\dfrac{3\pi}{6}$; donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_5}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. On trace donc le triangle équilatéral direct OA_3A_3' et le point A_5 appartient à (OA_3').

Le point A_5 est à l'intersection des droites d et (OA_3').
On peut également construire ce point A_5 à l'intersection de la droite (OA_3') et du cercle de diamètre $[OA_6]$.

ANNEXE 1 de l'exercice 2



ANNEXE 2 de l'exercice 4


j
A_4
A_3
A_2
i
A_5
A_3'
A_1
$\vec{v}$
$\frac{\pi}{6}$
A_0
A_6
O
$\vec{u}$