Corrigé bac S - Métropole 22 juin 2015

Exercice 1 **6 points**

Partie 1

1. a. Par définition, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}$.

   Or, $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de f et donc,

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_c^d = F(d) - F(c) = -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

   b. On a $P(X > 20) = P(0 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 1 - e^{-20\lambda}$.

   Ainsi, $P(X > 20) = 0,95 \iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95 \iff \lambda = -\dfrac{\ln(0,05)}{20} \simeq 0,150$.

   c. L'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \simeq 6,676$.

   Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.

   d. $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} \simeq 0,173$.

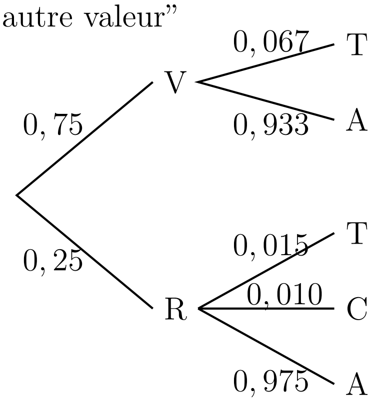
   e. $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = 1 - \left(e^{-0\lambda} - e^{-18\lambda}\right) = e^{-18\lambda} \simeq 0,067$.

2. a. La calculatrice donne $P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \simeq 0,015$.

   b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) \simeq 0,010$.

Partie 2 On peut alors représenter la situation par un arbre, en notant les événements :

— R : "le bon d'achat est rouge"
— V : "le bon d'achat est vert"
— T : "le bon d'achat est de trente euros"
— C : "le bon d'achat est de cent euros"
— A : "le bon d'achat est d'une autre valeur"



1. En notant S l'événement : "la valeur du bon d'achat est supérieure ou égale à 30 euros", la probabilité recherchée est la probabilité conditionnelle :

$$P_R(S) = P_R(T) + P_R(C) = 0,025$$

2. $P(S) = P(T \cup C) = P(V) \times P_V(S) + P(R) \times P_R(S) = 0,75 \times 0,067 + 0,025 \times 0,025 = 0,0565 \simeq 0,057$

3. En utilisant la valeur précédente, la probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 euros est $p = 0,057$.

   Comme $n = 200 \geqslant 30$; $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$, on peut utiliser la formule asymptotique de l'intervalle de fluctuation à 95% : la proportion p' dans un échantillon aléatoire de 200 bons d'achat est, avec une probabilité d'environ 95%, dans l'intervalle de fluctuation

$$I = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \simeq \Big[0,024 ; 0,090\Big]$$

Ici, la proportion observée est $p' = \dfrac{6}{200} = 0,03$. On a $p' \in I$, et donc les doutes du directeur du magasin ne sont pas justifiés : avec un faible risque d'erreur (d'environ 5%), la fluctuation de p' par rapport à celle de p annoncée s'explique simplement par le fait que l'échantillon des 200 billets de son magasin est constitué au hasard.

Exercice 2 **3 points**

1. a. Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

   La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

   b. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = 4\overrightarrow{OJ} + 3\overrightarrow{OK}$ est un vecteur directeur de la droite (CD) qui est donc incluse dans un plan parallèle à (OJK)

   Comme $x_C = x_D = 11$ le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x = 11$.

   c. On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, ce qui montre que ces vecteurs sont colinéaires, et ainsi que E est un point de la droite (AB).

   De plus $x_E = 11$, et donc $E \in \mathcal{P}$.

   Ainsi, E est bien le point d'intersection de (AB) et de $\mathcal{P}$.

   Remarque : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI}$, donc $(AB)//(OI)$, et comme $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (OJK), (AB) est bien orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Cette justification n'était par contre pas demandée...

   d. (CD) est incluse dans $\mathcal{P}$, et (AB) coupe $\mathcal{P}$ en E.

   Ainsi, si (AB) et (CD) sont sécantes, elles le sont nécessairement au point E.

   Or, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{CD}$, ce qui montre que $E \notin (CD)$.

   Ainsi, (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

   Autre méthode. On peut aussi chercher directement l'éventuelle intersection des deux droites à l'aide de leur représentation paramétrique :

   $$(AB) : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R} \qquad (CD) \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 11 \\ y & = & 0,8t' \\ z & = & 1 + 0,6t' \end{array}\right. ,\ t' \in \mathbb{R}$$

   On cherche alors t et t' tels que $\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 11 \\ -1 & = & 0,8t' \\ 5 & = & 1 + 0,6t' \end{array}\right.$. Or ce système n'a pas de solution, et donc (AB) et (CD) pas d'intersection et ne sont donc pas sécantes.

2. a. $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11-t\\0,8t+1\\0,6t-4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

   b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

   On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression $f(t =) = M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

   f est une fonction du second degré avec $f'(t) = 4t - 25,2$.

   Ainsi $f'(t) = 0 \iff t = \dfrac{25,2}{4} = 6,3$, et $f'(t) < 0$ donc f est décroissante pour $t < 6,3$, et $f'(t) > 0$ donc f croissante pour $t > 6,3$.

   Ainsi f, donc M_tN_t, admet un minimum en $t = 6,3$.

Exercice 3 **5 points**

1. L'équation du second degré $z^2 - 8z + 64 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$ est admet donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{8 + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4i\sqrt{3}$.

2. a. $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = 8$.
   On en déduit $a = 8\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{3}$.

   b. On a trouvé $a = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   c. $|a| = 8$; $|b| = |\overline{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre O et de rayon 8.

   d. Voir figure en fin d'exercice.

3. a. $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8$.

   b. $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc $|a'| = 8$, et $\arg(a') = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. a. $r = \dfrac{a' + b}{2} = \dfrac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 0$, et $s = \dfrac{b' + c}{2} = \dfrac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$.

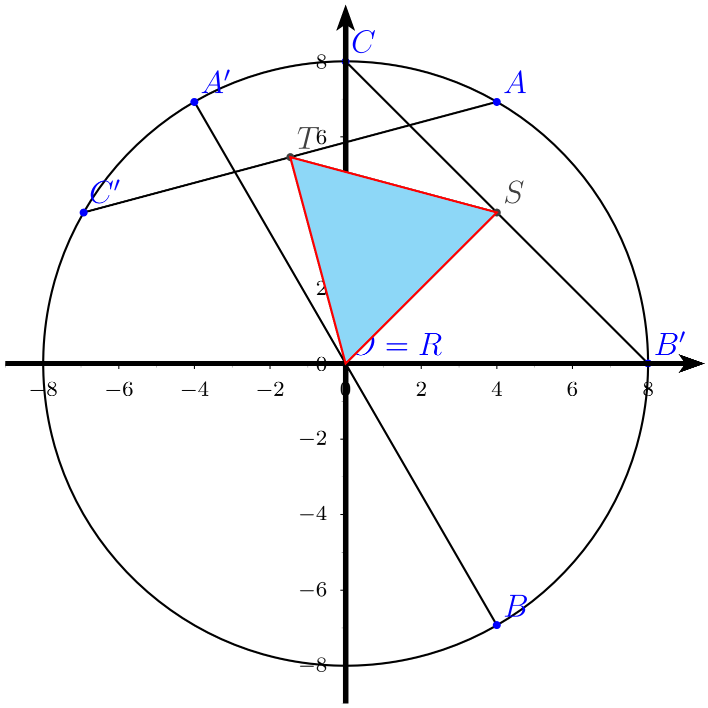
   b. RST semble être un triangle équilatéral.
   On calcule : $RS = |s - r| = |4 + 4i| = 4|1 + i| = 4\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} ST &= |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i\left(-2 + 2\sqrt{3}\right)| = 2|-1 - \sqrt{3} + i\left(-1 + \sqrt{3}\right)| \\ &= 2\sqrt{\left(-1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(-1 + \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3\right)} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} RT &= |t - r| = |2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})| = 2|1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})| \\ &= 2\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

   $RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est bien équilatéral.



Exercice 4 **6 points**

Partie 1

1. $f = uv + w$ avec $u(x) = x + 1$, donc $u'(x) = 1$, $v = \ln(u)$, donc $v' = \dfrac{u'}{u}$ soit $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $w(x) = -3x + 7$ donc $w'(x) = -3$.

   On a alors $f' = u'v + uv' + w'$, soit $f'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) - 2$.

2. $f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x + 1 > e^2$, par croissance de la fonction exponentielle, et donc $f'(x) > 0 \iff x = e^2 - 1$.

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$f\left(e^2-1\right)$ $= 10 - e^2 \simeq 2,6$	$\nearrow$	$f(20) \simeq 10,93$

3. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $f'(0) = 1\ln(1) - 2 = -2$.

4. Une primitive de f est donc donnée par $F(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{2} + 7x$

Partie 2

1. — La différence entre les points le plus haut et le plus bas est $f(20) - f\left(e^2-1\right) \simeq 8,3 > 8$ donc P_1 est vraie.
   — $f'(20) = \ln(21) - 2 \simeq 1,04$. D'après la question 3., l'inclinaison en B est 2, donc P_2 est vraie.

2. L'aire de la face avant, en unités d'aire, vaut

   $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_0^{20} f(x)dx = F(20) - F(0) \simeq 101,3.$

   L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(OAB'B) = 10f(0) = 70$.

   L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(DD'C'C) = 10f(20) \simeq 109,3$.

   L'aire à peindre est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \simeq 381,9$ m^2.

   Il faut prévoir donc au minimum $\dfrac{381,9}{5} \simeq 77$ litres de peinture.

3. a. $B_kB_{k+1} = \sqrt{(k+1-k)^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$.

   b. La partie de l'algorithme à compléter est :

   S prend la valeur 0.

   Pour K allant de 0 à 19

   S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + \left(f(k+1) - k(k)\right)^2}$

   Fin Pour