Corrigé du Bac S - Métropole 19 juin 2014

Exercice 1 **Partie A**

1. On a $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$ et donc $A(0;1) \in \mathcal{C}_1$.
2. Comme $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, f_1 est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et composéee de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec, pout tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - e^{-x}$.
De plus, $f'(x) = 1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < 1 = e^0 \iff -x < 0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > 0$.
En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$, et donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$.
En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^x + 1\right)$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée en l'infini de l'exponentielle et des polynômes).
Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + 1) = 1$, et alors, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. a. I_n est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$: l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, et entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_n$.
   b. Il semblerait que la courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ soit en dessous de la courbe $_n$. On peut donc conjecturer que la suite I_n est décroissante.
   Il semblerait de plus que lorsque n devient grand, la courbe $\mathcal{C}_n$ se rapproche de la diagonale du carré de côté $[OA]$. On peut ainsi conjecturer que la suite (I_n) est convergente, de limite $\dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right)\,dx - \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\,dx = \int_0^1 \left[\left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right)\right]dx \\
&= \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right)\,dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\,dx
\end{aligned}$$

car $e^{-(n+1)x}e^x = e^{-(n+1)x+x} = e^{-nx}$.

De plus, pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-(n+1)x} > 0$, et $e^x \geqslant e^0 = 1$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $[0;1]$, et donc, $1 - e^x \leqslant 0$.
On en déduit que pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) \leqslant 0$, et donc que

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right)\,dx \leqslant 0$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

Comme pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout entier n, $e^{-nx} > 0$, et donc, $f_n(x) = x + e^{-nx} > 0$, on a $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$.
Ainsi, (I_n) est une suite décroissante et minorée par 0 : (I_n) est donc convergente.

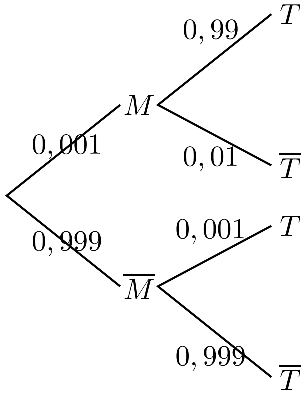
3. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 e^{-nx}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\left(1 - e^{-n}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$, ce qui démontre la conjecture émise au début de cette partie.

Exercice 2 **Partie A**

1. a) Le pourcentage de personnes malades est de 0,1%, ainsi $P(M) = 0,1\% = 0,001$.

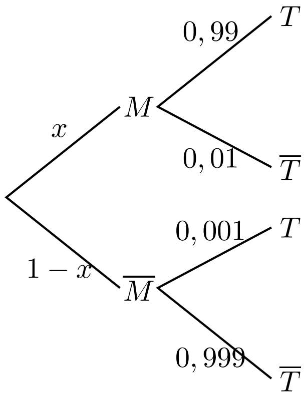


b) D'après la loi des probabilités totales (ou l'utilisation de l'arbre des probabilités), les événements M et $\overline{M}$ constituant une partition de l'univers :
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001 = 1,989 \times 10^{-3}$.

c) L'affirmation fait référence à la probabilité d'être malade *sachant que* le test est positif :
$P_T(M) = \dfrac{P\left(T \cap M\right)}{P(T)} = \dfrac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \dfrac{0,99}{0,99 + 0,999} \simeq 0,498 < \dfrac{1}{2}$.

L'affirmation est donc correcte : si une personne obtient un test positif, alors la probabilité qu'elle soit effectivement malade est (légèrement) inférieure à 0,5, soit un peu moins d'une chance sur deux.

2. On reprend la même démarche, avec maintenant $P(M) = x$:



On a alors : $P(T) = 0,99x + 0,001 \times (1 - x) = 0,001 + 0989x$ et donc, $P_T(M) = \dfrac{0,99x}{0,001 + 0,989x}$.

On cherche alors à résoudre, pour $x \in [0; 1]$, $P_T(M) \geqslant 0,95$, soit

$$\frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geqslant 0,95 \iff 0,99x \geqslant 0,95 \times (0,001 + 0,989x) \text{ car } 0,001 + 0,989x \geqslant 0,001 > 0$$

$$\iff 0,99x \geqslant 0,00095 + 0,93955x \iff x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \simeq 0,01883$$

Le test est donc commercialisable dès lors que la proportion x de personnes atteintes par la maladie dans la population est supérieure à environ $0,01883 \simeq 1,8\%$.

Partie B

1. a) On utilise la calculatrice, qui donne : $P(890 \leqslant X \leqslant 920) \simeq 0,92$ à 10^{-2} près.

b) On pose $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 900}{7}$ qui est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

On a alors $P\left(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h\right) = P\left(-\dfrac{h}{7} \leqslant Z \leqslant \dfrac{h}{7}\right) = 0,99$.

Or on sait que $P\left(-u_{0,01} \leqslant Z \leqslant u_{0,01}\right) \simeq 0,99$ pour $u_{0,01} \simeq 2,58$.

Ainsi, on doit avoir $\frac{h}{7} \simeq 2,58 \iff h \simeq 7 \times 2,58 \simeq 18,06$.

Puisque le nombre h demandé est entier, on arrondit à $h = 18$.

On peut vérifier à la calculatrice que $P(882 \leqslant X \leqslant 918) \simeq 0,9899 \simeq 0,990$ à 10^{-3} près.

2. Puisque la sélection de l'échantillon est assimilée à un tirage au sort avec remise, on a donc $n = 1000$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont le succès est "le comprimé tiré est conforme" de probabilité $p = 0,97$.

   La variable aléatoire X qui est égale au nombre de comprimés non conformes sur ces 1000 rpétitions suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(1000\ ;\ 0,97)$.

   Le paramètre $n = 1000$ étant suffisamment élevé ($n \geqslant 30$), on en déduit que l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% pour la proportion $\frac{X}{n}$ est

$$\left[0,97 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0,97 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right] \simeq \left[0,9594\ ;\ 0,9806\right]$$

   Cela signifie que la proportion de comprimés conformes dans un lot de 1000 comprimés est comprise dans l'intervalle ci-dessus, avec une probabilité de 0,95. Comme la proportion de comprimés conformes constatée dans cet échantillon est de $\frac{1000-53}{1000} = 0,947$, donc est en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique déterminé précédemment, on en déduit que les réglages faits par le laboratoire ont une forte probabilité d'être à revoir. La probabilité qu'ils soient corrects bien que l'échantillon donne une proportion de comprimés conformes en dehors de l'intervalle de fluctuation n'est que de $0,05$.

Exercice 3

1. Le discriminant Δ de ce trinôme du second degré est : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48 < 0$. L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées, qui sont :

   $Z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2i\sqrt{3}$.

   On a $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4$. On peut alors écrire :

$$Z_1 = 4 \times \left(\frac{-2}{4} + i\frac{-2\sqrt{3}}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{\frac{-2i\pi}{3}}$$

   et $Z_2 = \overline{Z_1} = 4e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$.

2. a a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$, alors $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriété du module et des arguments, $a^2 = 2^2 e^{2\times\frac{1\pi}{3}}$, donc $a^2 = Z_2$ et la forme algébrique de a^2 est $a^2 = Z_2 = -2 + 2\imath\sqrt{3}$.

   Le nombre a est donc une solution à l'équation dont on parle dans cette question. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$.

   Sous forme algébrique : $a = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ et $-a = -1 + i \times \left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1 ; y_1 ; x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1 + \imath y_1$ et $z_2 = x_2 + \imath y_2$.

   On a alors $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

   Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1x_2 - y_1y_2$ et $y_3 = x_1y_2 + x_2y_1$, qui sont réels également.

   On a donc écrit le produit z_1z_2 sous la forme $x_3 + iy_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de z_1z_2 est : $\overline{z_1z_2} = x_3 - iy_3 = (x_1x_2 - y_1y_2) - \imath(x_1y_2 + x_2y_1)$.

   Par ailleurs, $\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \times (x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_2x_1 + (-i)^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$

   Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\ \overline{z_2} = \overline{z_1z_2}$.

   Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$ et la propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain entier k non nul, c'est-à-dire que l'on suppose que pour tout complexe z, on a $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$.

Soit alors z un nombre complexe quelconque. On a $z^{k+1} = z^k \times z$, donc $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z}$, d'après la première propriété démontrée, d'où $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = (\overline{z})^k \times \overline{z}$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi donc, $\overline{z^{k+1}} = (\overline{z})^{k+1}$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang suivant $k+1$.

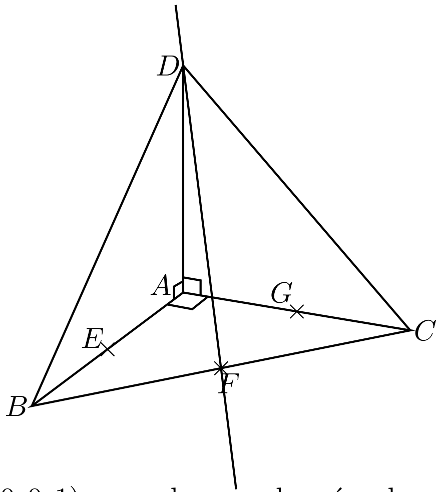
Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), c'est-à-dire que : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.
   Soit $Z = \overline{z}$ le conjuqué de z, alors d'après les propriétés précédentes

$$Z^4 + 4Z^2 + 16 = \overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = \overline{z^4} + 4\overline{z^2} + 16 = \overline{z^4} + \overline{4z^2} + 16 = \overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} = 0$$

   Ainsi $Z = \overline{z}$ est aussi solution de (E).
   Comme on a établi à la question 2. que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2 = Z_2$ et $(-a)^2 = Z_2$, c'est-à-dire que a et $-a$ sont solutions de (E), les nombres $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont aussi des solutions de (E).
   Nous avons donc 4 solutions à l'équation, qui sont distinctes : $a = 1 + i\sqrt{3}$; $-a = -1 - i\sqrt{3}$; $\overline{a} = 1 - i\sqrt{3}$ et $\overline{-a} = -1 + i\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, on conclut que ce sont exactement toutes les solutions de (E).

Exercice 4 Tout d'abord, une figure :



1. a) On a $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, et $D(0;0;1)$, pour les coordonnées des points directement liés au repère, et alors $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ puisque F est le milieu de $[BC]$.

   b) Une représentation paramétrique de (DF) est donnée par $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$ où $M(x;y;z)$ est un point de la droite de paramètre t, et $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$ est un vecteur directeur de la droite.

   Cette relation se réécrit sous la forme de la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$.

   c) Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à (DF), donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + d = 0$ où d est un réel.

   De plus, on sait que $A(0;0;0) \in \mathcal{P}$, et donc que $\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

   Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$

   d) Le point $H(x;y;z)$ est un point de (DF) et de $\mathcal{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, et qui vérifient également l'équation du plan : il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{array}\right.$ et $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$.

En substituant les expressions de x, y et z en fonction du paramètre t dans l'équation de $\mathcal{P}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)-(1-t)=0 \iff \frac{3}{2}t-1=0 \iff t=\frac{2}{3}$$

Ainsi, H a pour coordonnées $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z=1-t=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$, c'est à dire : $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

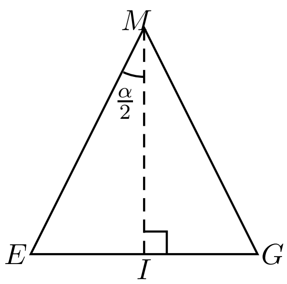
e) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont :
$\overrightarrow{HE}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{HG}=\left(0-\frac{1}{3};\frac{1}{2}-\frac{1}{3};0-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{3}\right)$.
Comme on travaille avec un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs peut être obtenu avec ces coordonnées, et on a : $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\times\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{-1}{3}\times\frac{-1}{3}=\frac{-1}{18}+\frac{-1}{18}+\frac{1}{9}=0$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux, et donc que l'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

2. On reconnaît dans le point M décrit, le point de paramètre t dans la représentation paramétrique de la droite (DF) donnée à la question 1. b..

a) Le point E est le milieu du segment $[AB]$, donc ses coordonnées sont $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t;0-\frac{1}{2}t;0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}(1-t);-\frac{1}{2}t;t-1\right)$.
On a donc

$$ME^2=\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+\frac{t^2}{4}+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$$

b) On procède de façon analogue pour calculer la longueur MG : Le point G est le milieu du segment $[AC]$, donc ses coordonnées sont $E\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{MG}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{MG}\left(0-\frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\ ;\ 0-\right.$
soit $\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2}(1-t)\ ;\ t-1\right)$.
On a donc $MG^2=\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG}=\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+(t-1)^2=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.
On a donc $MG^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}=ME^2$, et, comme MG et ME sont des longueurs, donc des nombres positifs, on a bien $MG=ME$ et le triangle MEG est isocèle.
Dans le plan (MEG), on a la situation :



On a alors, dans le triangle EIM, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{EG}{2}}{ME} \iff ME\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{EG}{2}$. Or $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $G\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, d'où $\overrightarrow{EG}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, et donc, $EG=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient bien ainsi, $ME\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{EG}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c) α désigne la mesure en radians d'un angle géométrique, et donc $\alpha \in [0;\pi]$. On a alors $\dfrac{\alpha}{2} \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est croissante :

α	0		π
$\dfrac{\alpha}{2}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}$	0	$\nearrow$	1

On en déduit en particulier que : α maximal $\iff \sin\dfrac{\alpha}{2}$ maximal.

De plus, on a d'après la question précédente, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}ME}$.

Donc, $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ est maximal lorsque ME est minimal, et donc lorsque ME^2 est minimal car la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, ME et ME^2 ont le même sens de variation.

d) On avait $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$. En notant $f(t) = ME^2$, on définit une fonction f trinôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que $f'(t) = 3t - \dfrac{5}{2}$ et qui est donc décroissante sur $\left[-\infty;\dfrac{5}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{5}{6};+\infty\right[$. En particulier f, donc ME^2, donc aussi ME, a un minimum en $t = \dfrac{5}{6}$.
La position du point M telle que la mesure de l'angle soit maximale est donc celle atteinte pour le paramètre $t = \dfrac{5}{6}$, soit $M\left(\dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$.