Devoir de mathématiques

Exercice 1 Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n), où $u_n = \dfrac{2n+1}{4n(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n\sqrt{n}+1}$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4\,.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
   Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de la suite (u_n).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4n - 9$.

Exercice 3 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2009, 4 points)*
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.
   a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
      Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
   c. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1\,.$$

   Le tableau suivant donne les premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
   b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
      Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.