Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $u_n=\dfrac{2n+1}{4n(n+1)}=\dfrac{2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)}{4n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2n}}{2n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1n}\right)=1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}2n\left(1+\dfrac{1}{1n}\right)=+\infty$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

$$v_n=\dfrac{2n^2\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=2\dfrac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=2\dfrac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)=1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$.
Ainsi, par quotient et produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=2$.

Exercice 2

1. $u_2=\left(1+\dfrac{2}{1}\right)u_1+\dfrac{18}{1}-4=3\times(-5)+14=-1$; $u_3=\left(1+\dfrac{2}{2}\right)u_2+\dfrac{18}{2}-4=2\times(-1)+5=3$
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est arithmétique de raison 4.
2. *Initialisation :* On a $u_1=-5$, et pour $n=0$, $4\times1-9=-5$.
   Ainsi, initialement au rang $n=1$, on a bien $u_n=4n-9$.

   Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n\geqslant1$, on ait $u_n=4n-9$, alors,

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\left(1+\frac{2}{n}\right)u_n+\frac{18}{n}-4\\&=\left(1+\frac{2}{n}\right)(4n-9)+\frac{18}{n}-4\\&=4n-9+\frac{8n}{n}-\frac{18}{n}+\frac{18}{n}-4\\&=4n-5\\&=4(n+1)-9\end{aligned}$$

   Ainsi au rang $n+1$ on a bien encore $u_{n+1}=4(n+1)-9$.

   Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n\geqslant1$, $u_n=4n-9$.

Exercice 3

1. a. Pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1}=u_{n+1}-6=\dfrac{1}{3}u_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}\left(u_{n+1}-6\right)=\dfrac{1}{3}v_n$.

   On en déduit que $\underline{(v_n)\text{ est géométrique de raison }q=\frac{1}{3}}$ et de premier terme $v_0=u_0-6=-5$.

   b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $v_n=v_0q^n=-5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, et donc que, pour tout entier n , $u_n=v_n+6=-5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+6$.

c. Comme $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 6$.

2. a. Pour $n = 10$, $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$, d'où, $w_{10} = 21$.

   b. D'après les valeurs de w_n pour les premiers entiers, on peut conjecturer que $w_n = 2n + 1$.

   Démonstration de la conjecture : Démonstration par récurrence.

   Initialisation : La relation est vraie pour tous les entiers $n \leq 10$.

   Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $w_n = 2n + 1$ (hypothèse de récurrence), alors, $(n + 1)w_{n+1} = (n + 2)w_n + 1 = (n + 2)(2n + 1) + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

   On a donc, $(n+1)w_{n+1} = 2n^2+5n+3 = (n+1)(2n+3)$, soit donc $w_{n+1} = 2n+3 = 2(n+1)+1$.

   Ainsi, l'expression est encore vraie au rang $n + 1$.

   On a ainsi démontré d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n, $w_n = 2n + 1$.

   On en déduit que $w_{2009} = 2 \times 2009 + 1 = 4019$.

Exercice 4

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_p > 1$.

   $\dfrac{1 + 3u_p}{3 + u_p} = \dfrac{3 + u_p - 2 + 2u_p}{3 + u_p} = \dfrac{(3 + u_p) + (2u_p - 2)}{3 + u_p} = 1 + 2\dfrac{u_p - 1}{3 + u_p}$.

   Par hypothèse de récurrence on a :

   $u_p - 1$ et comme $u_p > 1$, $3 + u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\dfrac{1}{3 + u_p} > 0$ et finalement $\dfrac{u_p - 1}{3 + u_p} > 0$, c'est-à-dire que $u_{p+1} = \dfrac{1 + 3u_p}{3 + u_p} > 1$

   Conclusion : on a démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

2. a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - u_n = \dfrac{1 + 3u_n - 3u_n - u_n^2}{3 + u_n} = \dfrac{1 - u_n^2}{3 + u_n} = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

   b) On sait que pour tout entier n, $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1 - u_n^2 < 0$ et comme $3 + u_n > 0$, on a finalement $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

   c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite l supérieure ou égale à 1.

   De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$, et alors cette limite l vérifie

   $$l = \frac{1 + 3l}{3 + l} \iff l(3 + l) = 1 + 3l \iff l^2 = 1$$

   et donc $l = -1$ ou $l = 1$.

   Comme on a vu que $l \geqslant 1$, il n'y a qu'une possbilité : $l = 1$.