Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

c) A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exercice 2

1. a) f est définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$ et $E(X) = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   b) $P(X > 0) = P(X \in [0; 2]) = \dfrac{2-0}{3} = \dfrac{2}{3}$

   $$P_{(X>0)}(X > 1) = \frac{P\Big((X > 1) \cap (X > 0)\Big)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 1)}{P(X > 0)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

2. a) g est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = 10$.

   b) $P(Y \leqslant 1) = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^1 = -e^{-\lambda} + 1 \simeq 0,095$

   c) $P(Y \geqslant 10) = 1 - P(Y < 10) = 1 - (-e^{-0,1 \times 10} + 1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0,368$

   d) $P(1 \leqslant Y \leqslant 2) = P(Y \leqslant 2) - P(Y < 1) = -e^{-0,1\times 2} + 1 - (-e^{-0,1\times 1} + 1) = e^{-0,1} - e^{-0,2} \simeq 0,086$

Exercice 3

Partie A

1. On cherche $p(1,35 \leqslant X \leqslant 1,65)$ qui vaut, d'après la calculatrice, environ $\approx 0,968$.

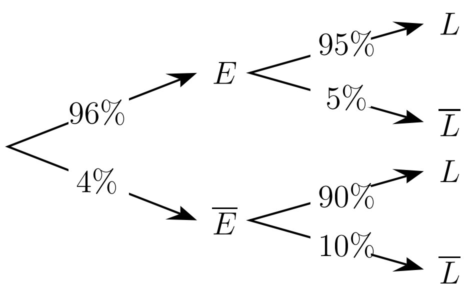
2. a) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est

   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \Big[0,003\ ;\ 0,037\Big]$$

   b) La fréquence observée de tubes non « conformes pour la longueur » est $f = \dfrac{10}{250} = 0,04$.
   On a $f \notin I$, on peut donc estimer qu'il faut réviser la machine.

Partie B

1. D'après l'énoncé $P\left(\overline{E} \cap L\right) = 3,6\%$ donc $p_{\overline{E}}(L) = \dfrac{P(\overline{E} \cap L)}{P(\overline{E})} = \dfrac{3,6\%}{4\%} = 0,9 = 90\%$.



2. En utilisant l'arbre, ou la formule des probabilités totales, $\begin{aligned} P(L) &= P(L \cap E) + P\left(L \cap \overline{E}\right) \\ &= 96\% \times 95\% + 3,6\% = 94,8\% \end{aligned}$

3. La probabilité cherchée est $P_L(E) = \dfrac{P(E \cap L)}{P(L)} = \dfrac{96\% \times 95\%}{94,8\%} \simeq 96,2\%$.