Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 a) $z_1=\dfrac{2(1+i)}{2}=1+i$ b) $z_2=2i+\dfrac{-i}{2}=\dfrac{3}{2}i$ c) $z_3=\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Exercice 2 Soit $z=1+i\sqrt{3}$, alors $|z|=2$ et $\theta=\arg(z)$ tel que $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ et alors, $z=2e^{i\pi/3}$. On en déduit que $z^6=\left(1+i\sqrt{3}\right)=\left(2e^{i\pi/3}\right)^6=2^6e^{6\times i\pi/3}=64e^{2i\pi}=64$.

Exercice 3 *(D'après baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007, 3 points)*

1. On a $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$.
2. — $|z_1|^2=2+6=8\Rightarrow|z_1|=2\sqrt{2}$. On a donc $z_1=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.
   — On a de même $|z_2|=2\sqrt{2}$, puis $z_2=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{4}\quad[2\pi]$.
   — Il suit $\arg(Z)=\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}\quad[2\pi]$. et $|Z|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=1$.
3. On en déduit que $Z=\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification avec la forme algébrique du 1) :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)\quad\text{et}\quad\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Exercice 4

a) Avec $z=x+iy$, on a $Z=\dfrac{z+1}{z-i}=\dfrac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)}$ et donc
$$Z=\frac{\Big((x+1)+iy\Big)\Big(x-i(y-1)\Big)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{\Big(x(x+1)+y(y-1)\Big)+i\Big(xy-(x+1)(y-1)\Big)}{x^2+(y-1)^2}$$

b) Maintenant, Z est réel (pur) si et seulement si $xy-(x+1)(y-1)=0\iff x-y+1=0\iff y=x+1$.
L'ensemble des points M recherchés est donc la droite d'équation $y=x+1$.

c) Maintenant, Z est imaginaire pur si et seulement si $x(x+1)+y(y-1)=0\iff x^2+x+y^2-y=0$
Soit M le point d'affixe $z=x+iy$ et A le point d'affixe $z_A=x_A+iy_A$, alors
$$\begin{aligned}AM^2&=|z-z_A|^2\\&=(x-x_A)^2+(y-y_a)^2\\&=x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2\end{aligned}$$
et on a alors $x^2+x+y^2-y=0\iff AM^2=\dfrac{1}{2}$ avec $x_A=-\dfrac{1}{2}$ et $y_A=\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, l'ensemble des points recherchés est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.