Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 On a $OA = |z_A| = 2 = OB$, et $\arg(z_A) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arg(z_B) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ et ainsi, $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, OAB est rectangle et isocèle en O.

Exercice 2 Amérique du Nord 28 mai 2019, 4 points

Affirmation 1 : FAUX

$$\begin{aligned} z - i = i(z+1) &\iff z - iz = 2i \\ &\iff z = \frac{2i}{1-i} \\ &\iff z = \frac{2i(1+i)}{2} \\ &\iff z = -1 + i \end{aligned}$$

Or, $|z| = |-1+i| = \sqrt{2}$ et l'argument de z est alors θ tel que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta = \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$. Ainsi, la solution de cette équation est $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \neq \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : FAUX

$$\begin{aligned} 2\cos(x)e^{-ix} &= 2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^{-ix} \\ &= 1 + e^{-2ix} \neq 1 + e^{2ix} \end{aligned}$$

Affirmation 3 : VRAI Soit $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned} \left|z - i\right| = \left|z+1\right| &\iff \left|x + i(y-1)\right|^2 = \left|(x+1)+iy\right|^2 \\ &\iff x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff -y = x \end{aligned}$$

et donc M appartient bien à la droite d'équation $y = -x$

Affirmation 4 : FAUX Supposons que cette équation ait une solution réelle x, alors on aurait

$$x^5 + x - i + 1 = 0 \iff x^5 + x + 1 = i$$

or si x est réel, alors $x^5 + x + 1$ est aussi réel et ne peut donc pas être égal à i. Il est ainsi impossible que cette équation ait une solution réelle.

Exercice 3 *D'après* Métropole–La Réunion *22 juin 2018*

1. a)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

b) On a donc $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8$ soit $z_1 = 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Ensuite, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 6e^{-i\frac{2\pi}{6}}$, soit $z_2 = 6e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Enfin, $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 6e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}e^{-i\frac{3\pi}{6}}$ soit $z_3 = 3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Or, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, et donc $z_2 = -i3\sqrt{3}$ et z_2 est imaginaire pur avec $\mathrm{Im}(z_3) = -3\sqrt{3}$.

2. *Initialisation :* Pour $n = 0$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 = 1$ et $e^0 = 1$, donc on a bien $z_0 = 8 \times 1 \times 1 = 8$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : supposons que pour un certain entier $n \geqslant 0$, $z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$.

   On a alors $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}z_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$, par hypothèse de récurrence,

   soit aussi, $z_{n+1} = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$.

   La propriété est donc encore vraie au rang suivant $n + 1$: la propriété est héréditaire.

   Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 4 Antilles-Guyane, *septembre 2014*

1. $$\begin{aligned} f\left(-1 + \imath\sqrt{3}\right) &= \left(-1 + \imath\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1 + \imath\sqrt{3}\right) + 9 \\ &= 1 - 2\imath\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\imath\sqrt{3} + 9 = 5 \end{aligned}$$

2. On a déjà une solution $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ de l'équation $f(z) = 5$.
   Comme c'est une équation du second degré et qu'elle admet une solution complexe non réelle, c'est que $\Delta < 0$, et sa deuxième solution est le conjugué de la première : $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

   $|z_1| = \sqrt{1 + 3} = 2$

   Soit θ_1 un argument de z_1, alors $\cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et ainsi donc $z_= 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   On a ensuite $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

3. $f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
   L'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées si et seulement si son discriminant est strictement négatif :

   $$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32 = 4\left(\lambda - 8\right)$$

   et alors

   $$\Delta < 0 \iff \lambda - 8 < 0 \iff \lambda < 8$$

   L'équation $f(z) = \lambda$ admet donc deux solutions complexes conjuguées lorsque $\lambda \in]-\infty\,;8[$.

4. $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$; donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$.
   Donc $|f(z) - 8| = 3 \iff |z + 1|^2 = 3 \iff |z + 1| = \sqrt{3}$
   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;0)$, et M le point d'affixe z, alors

   $$|z + 1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \Omega M = \sqrt{3}$$

   et l'ensemble des points M recherchés est donc bien le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.