Correction du bac blanc de mathématiques

Exercice 1 *Nouvelle Calédonie, 2012* **5 points**

Partie A. 1. $P\left(i\sqrt{2}\right)=\left(i\sqrt{2}\right)^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)-2i\sqrt{2}$

avec, $\left(i\sqrt{2}\right)^2=i^2\sqrt{2}^2=-2$, et $\left(i\sqrt{2}\right)^3=\left(i\sqrt{2}\right)^2\times i\sqrt{2}=-2i\sqrt{2}$

ainsi,
$$\begin{aligned}P\left(i\sqrt{2}\right)&=-2i\sqrt{2}+2\left(2+i\sqrt{2}\right)+2\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)-2i\sqrt{2}\\&=-2i\sqrt{2}+4+2i\sqrt{2}+2i\sqrt{2}-4-2i\sqrt{2}=0\end{aligned}$$

$z_0=i\sqrt{2}$ est donc bien une racine de P.

2. a) En développant, on a :
$$\begin{aligned}\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)&=z^3+az^2+bz-z^2i\sqrt{2}-azi\sqrt{2}-bi\sqrt{2}\\&=z^3+\left(a-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-ai\sqrt{2}\right)z-bi\sqrt{2}\end{aligned}$$

En identifiant avec les coefficients du polynôme P, on obtient alors :
$$\left\{\begin{array}{lcl}a-\mathrm{i}\sqrt{2}&=&-2-\mathrm{i}\sqrt{2}\\b-a\mathrm{i}\sqrt{2}&=&2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\-b\mathrm{i}\sqrt{2}&=&-2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}a&=&-2\\b+2\mathrm{i}\sqrt{2}&=&2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\-b&=&-2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}a&=&-2\\b&=&2\\b&=&2\end{array}\right.$$

On a donc la factorisation $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

b) En utilisant la factorisation précédente :
$$P(z)=0\iff\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0\iff\left(z-i\sqrt{2}=0\ \text{ ou } z^2-2z+2=0\right)$$

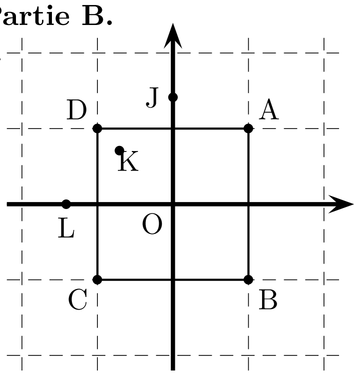
On retrouve la racine $i\sqrt{2}$. L'équation du second degré a pour discriminant $\Delta=-4<0$, et admet donc 2 racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{2-i\sqrt{4}}{2}=1-i$ et $z_2=\overline{z_1}=1+i$

Les solutions sont donc : $z_0=i\sqrt{2}$, $z_1=1-i$, et $z_2=1+i$.

c) z_0 est un nombre imaginaire pur, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, et $z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$. On a $|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, et $z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Enfin, $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Partie B.

1.



2. On a $z_K=e^{\frac{3i\pi}{4}}=\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. K est le milieu du segment $[JL]$ ce qui se traduit par :
$$z_K=\frac{z_J+z_L}{2}\iff z_L=2z_K-z_J=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

3. On a $|z_A|^2=1^2+1^2=2$, $|z_B|^2=1^2+(-1)^2=2$, $|z_J|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$
$|z_L|^2=\left(-\sqrt{2}\right)^2=2$.
On a donc $OA=OB=OJ=OL=\sqrt{2}$, et ainsi les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

4. $ABCD$ est un carré ; on peut raisonner pour le démontrer de nombreuses manières : en calculant les longueurs AB, AD et DB et en utilisant le théorème de Pythagore ; en montrant que $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ donc que $ABCD$ est un parallélogramme, et en calculant le produit scalaire (avec les coordonnées cartésiennes) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; ou encore en utilisant le point O, intersection et milieu des diagonales...

Par exemple, $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-2$ et $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=-2$, d'où $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme.

De plus, $AB=\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|=|-2|=2$, et $AD=\left|z_{\overrightarrow{AD}}\right|=|-2|=2$, et $DB=\left|z_{\overrightarrow{DB}}\right|=|2-2i|=\sqrt{8}$.

Ainsi, $AB^2+AD^2=DB^2$ donc, d'après le théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle, et comme de plus $AB=AD$, c'est un carré.

Exercice 2 *Amérique du Nord, 2011* **5 points**

Partie A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. g est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction affine et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x)=e^x-1$.
De plus, la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, $g'(x)=e^x-1\geqslant 0\iff e^x\geqslant 1\iff x\geqslant 0$.

<u>Limite en $-\infty$:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.

<u>Limite en $+\infty$:</u> On factorise par e^x qui est, en $+\infty$, le terme prépondérant : $g(x)=e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)$,

où $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$.

On a donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)=1$, et donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Ainsi, on a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2. D'après l'étude précèdente des variations de g, $g(0)=0$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$; en particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant g(0)=0$.

3. On a donc pour tout réel x, $g(x)=e^x-x-1\geqslant 0$, et ainsi, $e^x-x\geqslant 1>0$.

Partie B 1. a) On a $f=\dfrac{u}{v}$ avec les fonctions u et v définies par les expressions $\begin{cases}u(x)=e^x-1\\ v(x)=e^x-x\end{cases}$.
u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, comme la fonction exponentielle, et le dénominateur $u(x)=e^x-x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la partie A.. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}\\&=\frac{e^{2x}-xe^x-\left(e^{2x}-2e^x+1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{-xe^x+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{\left(e^x-x\right)^2}\end{aligned}$$

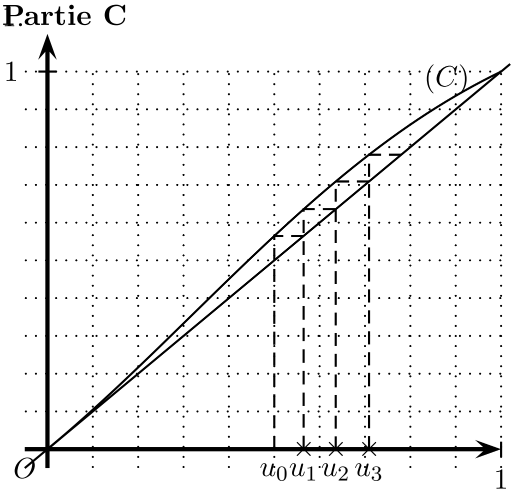
b) $0\leqslant x\leqslant 1 \iff -1\leqslant -x\leqslant 0 \iff 1\leqslant 2-x\leqslant 2$, et comme la fonction exponentielle est croissante sur $[0;1]$, $0\leqslant x\leqslant 1 \iff e^0=1\leqslant e^x\leqslant e^1=e$.
Ainsi, en multipliant terme à terme ces deux dernières inégalités, où tous les termes sont positifs, on obtient $1\leqslant e^x(2-x)\leqslant 2e$, et donc, $0\leqslant e^x(2-x)-1\leqslant 2e-1$.
Comme le dénominateur $(e^x-x)^2>0$ (d'après la partie A.), on a donc $f'(x)\geqslant 0$ et donc f est croissante sur $[0;1]$.

2. Comme f est croissante sur $[0;1]$, on a $x\in[0;1] \iff 0\leqslant x\leqslant 1 \iff f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$.
Or $f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0-1}=0$ et $f(1)=\dfrac{e^1-1}{e^1-1}=1$, et on a donc bien $0\leqslant f(x)\leqslant 1 \iff f(x)\in[0;1]$.

3. a) Pour tout x de $[0;1]$, $f(x)-x=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}-x=\dfrac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}$.
Or $(1-x)g(x)=(1-x)\left(e^x-x-1\right)=e^x-x-1-xe^x+x^2+x=e^x-1-xe^x+x^2$.
On a donc ainsi bien, pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

b) On a vu que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, donc aussi tout $x\in[0;1]$, $g(x)\geqslant 0$ et $e^x-x>0$.
Ainsi, $f(x)-x$ est du même signe que $1-x$, et donc $f(x)-x$ est positif sur $[0;1]$: la courbe (C) est au dessus de la droite (D) sur $[0;1]$, (C) et (D) se coupant en $x=0$ et en $x=1$.

Partie C



2. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $\dfrac12\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.
Initialisation : Pour $n=0$, $u_0=\dfrac12$ et $u_1=f\left(u_0\right)=f\left(\dfrac12\right)\simeq 0,56$, et donc on a bien $\dfrac12\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.
Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, on ait $\dfrac12\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$, alors, comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$, on a donc $f\left(\dfrac12\right)\leqslant f\left(u_n\right)\leqslant f\left(u_{n+1}\right)\leqslant f(1)$,
soit aussi, comme $f\left(\dfrac12\right)\simeq 0,56\geqslant\dfrac12$, $f(1)=1$, et $f\left(u_n\right)=u_{n+1}$ et $f\left(u_{n+1}\right)=u_{n+2}$, $\dfrac12\leqslant f\left(\dfrac12\right)\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $\dfrac12\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

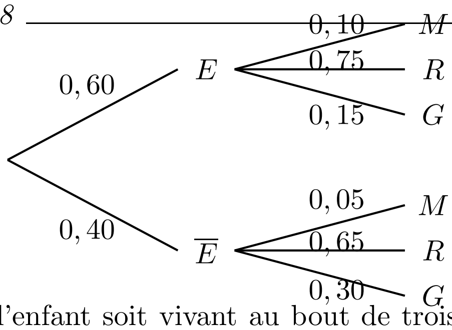
2. D'après le résultat précédent, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l\leqslant 1$.

3. La limite l est une solution de l'équation $f(l)=l$, et il s'agit donc de l'abscisse d'un point d'intersection de (C) et (D), soit $l=0$ ou $l=1$ d'après la question 2.b) de la partie B.

Or, d'après la question 2., pour tout entier n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et donc (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et ne peut pas converger vers $l = 0$. Ainsi $l = 1$, et la suite (u_n) converge donc vers 1.

Exercice 3 *Nouvelle Calédonie, mars 2008* **5 points**

1. a) On a l'arbre pondéré suivant :



b) La probabilité que l'oiseau acheté par l'enfant soit vivant au bout de trois mois est d'après l'arbre (ou la formule des probabilités totales) : $0,60 \times (0,75 + 0,15) + 0,40 \times (0,65 + 0,30) = 0,92$.

c) De même la probabilité pour l'enfant d'avoir un oiseau rouge est : $0,60 \times 0,75 + 0,40 \times 0,65 = 0,71$.

d) La probabilité que l'oiseau provienne du premier élevage sachant qu'il est gris est :

$$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{0,60 \times 0,15}{0,60 \times 0,15 + 0,40 \times 0,30} = \frac{0,09}{0,21} \simeq 0,43$$

2. On répète $n = 5$ fois l'expérience "choisir au hasard un oiseau", dont le succès est "l'oiseau est toujours en vie au bout d'un mois" et de probabilité $p = 0,92$. Ces expériences sont supposées identique et indépendante entre elles.

Ainsi, la variable aléatoire Y égale au nombre de succès, c'est-à-dire d'oiseaux en vie au bout d'un mois sur ces 5 pris au hasard, suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,92$.

La probabilité qu'au bout d'un mois trois soient en vie est alors :

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} 0,92^3 \times (1 - 0,92)^2 = 10 \times 0,92^3 \times 0,08^2 \simeq 0,05$$

3. On a le tableau de loi de probabilité suivant :

couleur	rouge	gris	mort
probabilité	0,71	0,21	0,08
gain(euros)	$+1$	$+0,25$	$-0,10$

On a donc $E(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 - 0,08 \times 0,10 = 0,7545 \approx 0,75$ euro.

4. a) L'enfant répète de façon identiques et indépendantes n fois l'expérience aléatoire : "prélever un oiseau". La probabilité pour qu'un oiseau pris au hasard soit gris est, en utilisant l'arbre de la question 1., $0,60 \times 0,15 + 0,40 \times 0,30 = 0,21$.

Ainsi, si l'enfant note Z la variable aléatoire égale au nombre d'oiseaux gris parmi les n oiseaux qu'il a achetés, Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,21$.

On a alors, $p_n = P(Z \geqslant 1) = 1 - P\left(\overline{Z \geqslant 1}\right) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (1 - 0,21)^n = 1 - 0,79^n$.

b) On cherche alors n tel que $p_n = 1 - 0,79^n \geqslant 0,99 \iff 0,79^n \leqslant 1 - 0,99 = 0,01$

puis, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(0,79^n) = n\ln(0,79) \leqslant \ln(0,01)$,

et enfin, en divisant par $\ln(0,79) < \ln(1) < 0$, $n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,79)} \simeq 19,54$.

L'enfant doit donc acheter au moins 20 oiseaux.

Exercice 4 *Amérique du Nord, 2013* **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. a) Pour $n = 3$, la variable i de la boucle varie de 1 à 3 :
— Pour $i = 1$, on affecte à u la valeur $\sqrt{2u} = \sqrt{2} \simeq 1,4142$
— Pour $i = 2$, on affecte à u la valeur $\sqrt{2u} \simeq \sqrt{2 \times 1,4142} \simeq 1,6818$
— Pour $i = 3$, on affecte à u la valeur $\sqrt{2u} \simeq \sqrt{2 \times 1,6818} \simeq 1,8340$
L'algorithme affiche finalement la dernière valeur de u trouvée : $1,8340$.

b) Cet algorithme permet de calculer et d'afficher le terme de rang n de la suite (u_n).

c) D'après ces valeurs approchées, on peut conjecturer que la suite est croissante et converge vers 2.

2. a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc on a bien $0 < u_n \leqslant 2$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel n on ait $0 < u_n \leqslant 2$, alors,
en multipliant ces inégalités par $2 > 0$, $0 < 2u_n \leqslant 4$, puis, comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a enfin $0 = \sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4} = 2$.

Ainsi, comme $\sqrt{2u_n} = u_{n+1}$, on a donc bien encore, au rang $n+1$, $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Pour déterminer le sens de variation de la suite, on peut procéder de (au moins) deux façons :

1ère méthode : par récurrence.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2} > u_0$. On a donc initialement, pour $n = 0$, $u_{n+1} > u_n$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n, on ait $u_{n+1} > u_n$,

alors, en multipliant par $2 > 0$, $2u_{n+1} > 2u_n$,

puis, comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que, d'après la question précédente, $u_n > 0$ pour tout n, on a donc $\sqrt{2u_{n+1}} > \sqrt{2u_n}$, soit $u_{n+2} > u_{n+1}$,

et la propriété $u_{n+1} < u_n$ est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $u_{n+1} > u_n$; en d'autres termes la suite (u_n) est strictement croissante.

2ème méthode : démonstration directe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n$,

soit, en utilisant la quantité conjuguée : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} = \dfrac{u_n(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $0 < u_n \leqslant 2$, et donc, $2 - u_n \geqslant 0$, et $\sqrt{u_n} + u_n > 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et la suite (u_n) est donc croissante.

c) La suite (u_n) est ainsi croissante et est majorée par 2 : elle converge donc vers une limite l.

3. a) Pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n - \ln 2 =$, donc,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln 2 = \ln\left(\sqrt{2u_n}\right) - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln u_n) - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

puis que $v_n = \ln u_n - \ln 2 \iff \ln u_n = v_n + \ln 2 \iff u_n = e^{v_n + \ln 2} = e^{v_n}e^{\ln 2} = 2e^{v_n}$.

c) Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n) = 0$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x = 1$, par composition des limites on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 1$ et finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

d)

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n

Exercice 4 **(5 points)** ***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***
On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_n) : 7\,x^2 + y^2 = 2^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

1. $(E_0) : 7\,x^2 + y^2 = 1$. Si $x \neq 0$, alors $7x^2 \geqslant 7$ et alors $y^2 = 1 - 7x^2 < 0$ ce qui est impossible.
   On doit donc avoir nécessairement $x = 0$, et donc $y^2 = 1$, soit $y = -1$ ou $y = 1$.
   (E_0) a dont deux solutions : $(0; -1)$ et $(0; 1)$.

   $(E_1) : 7\,x^2 + y^2 = 2$. De même on doit avoir $x = 0$ et alors $y^2 = 2$, qui n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
   Ainsi, (E_1) n'a pas de solution.

   $(E_2) : 7\,x^2 + y^2 = 4$. On doit encore avoir nécessairement $x = 0$, et donc $y^2 = 4$, soit $y = -2$ ou $y = 2$.
   (E_2) a donc deux solutions : $(0; -2)$ et $(0; 2)$.
2. Soit (x, y) est une solution de (E_n), $n \geqslant 1$, alors, comme $7 \equiv 1[2]$ et $2^n \equiv 0[2]$, on doit avoir $x^2 + y^2 \equiv 0[2]$.
   Ainsi, si x est pair, soit $x \equiv 0[2]$, alors $x^2 \equiv 0[2]$, et donc $y^2 \equiv 0[2]$: y^2 est pair, et donc y aussi.
   Si x est impair, soit $x \equiv 1[2]$ alors $y^2 \equiv 1[2]$ et donc y^2, donc y est aussi impair.

   En résumé, x et y ont même parité.
3. Soit $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, alors $(E_n) : 7x^2 + y^2 = 2^{2p+1} = 2 \times \left(2^2\right)^n = 2 \times 4^n$
   et ainsi, modulo 3, comme $7 \equiv 1\,[3]$ et $4^n \equiv 1^n\,[3] \equiv 1[3]$, on obtient $(E_n) : x^2 + y^2 \equiv 2\,[3]$.
   Si par exemple $x \equiv 0[3]$, alors $x^2 \equiv 0^2[3] \equiv 0[3]$ et on devrait donc avoir $y^2 \equiv 2[3]$. Or,
   — si $y \equiv 0[3]$ alors $y^2 \equiv 0[3]$
   — si $y \equiv 1[3]$ alors $y^2 \equiv 1^2[3] \equiv 1[3]$
   — si $y \equiv 2[3]$ alors $y^2 \equiv 2^2[3] \equiv 1[3]$
   Il est donc impossible d'avoir $y^2 \equiv 2[3]$ donc x ne peut pas être divisible par 3.
   Comme x et y jouent des rôles symétriques dans l'équation modulo 3, y ne peut pas non plus être divisible par 3.
4. Soit $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, alors $(E_n) : 7x^2 + y^2 = 2^{2p} = (2^p)^2$.
   Ainsi, on admet au moins les solutions $(0; 2^p)$ et $(0; -2^p)$
5. $(E_6) : 7x^2 + y^2 = 2^6 = 64$.
   si $|x| \geqslant 4$, alors $x^2 \geqslant 16$ et donc $7x^2 \geqslant 112$, d'où $y^2 = 64 - 7x^2 < 0$ ce qui est impossible.
   On doit donc nécessairement avoir $|x| \leqslant 3$, soit $-3 \leqslant x \leqslant 3$.
6. Soit $(x; y)$ une solution de $(E_n) : 7x^2 + y^2 = 2^n$.
   Alors, $2^{n+2} = 4 \times 2^n = 4\left(7x^2 + y^2\right) = 7 \times 4x^2 + 4y^2 = 7\,(2x)^2 + (2y)^2$.
   On trouve donc que $(2x; 2y)$ est une solution de (E_{n+2}).

Partie B

On pose le système $(S) \left\{\begin{array}{rcrcl} 7\,x^2 & + & y^2 & = & 2^4 \\ 13\,x^2 & + & 2\,y^2 & = & 31 \end{array}\right.$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 2^4 \\ 31 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, alors le système s'écrit $AX = B$.
2. $A^2 - 9\,A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.
3. On a donc, $-A^2 + 9A = A\,(-A + 9I_2) = (-A + 9I_2)\,A = I_2$, d'où A est inversible,
   d'inverse $A^{-1} = -A + 9I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -13 & 7 \end{pmatrix}$.
4. Retrouver la matrice inverse de A au moyen d'une formule d'inversion connue pour les matrices d'ordre 2.
   On aurait aussi pu utiliser la formule : $A^{-1} = \dfrac{1}{7 \times 2 - 13 \times 1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -13 & 7 \end{pmatrix}$
5. À l'aide de A^{-1}, on obtient les solutions de (S) :
   $$AX = B \iff X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^4 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 - 31 \\ -13 \times 2^4 + 7 \times 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$
   On trouve ainsi $x^2 = 1$, soit $x = -1$ ou $x = 1$, et $y^2 = 9$, soit $y = -3$ ou $y = 3$.