Une démonstration du principe de récurrence

Atteindre l'infini à partir de l'existence d'un plus petit nombre

Y. Morel

Le principe de récurrence permet de démontrer un ensemble infini et dénombrable de propriétés. On note par exemple P_n ces propriétés. Pour démontrer que **toutes** les propriétés P_n sont vraies, à partir d'un premier entier n_0, on démontre tout d'abord que la première de ces propriétés P_{n_0} est vraie (initialisation), ensuite on démontre que cette véracité se propage "de proche en proche" : si pour un entier n quelconque P_n est vraie, alors la propriété suivante P_{n+1} est aussi vraie.

Le principe de récurrence est celui qui permet alors justement de conclure, à partir de ces deux étapes, que **toutes** les propriétés P_n, pour **tous** les entiers n, sont vraies, dès le premier n_0, jusqu'à ...l'infini.

Une démonstration de ce principe, permettant de démontrer des propriétés P_n pour des entiers n aussi grands que souhaités, repose au contraire sur l'existence d'un plus petit nombre entier dans un ensemble d'entiers :

Propriété : Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide possède un plus petit élément.

Cette propriété admise ici est des plus simples : un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est un ensemble de nombres entiers naturels.

Ces nombres sont donc au moins positifs, plus grands que zéro, et peuvent être ordonnés : il y en a nécessairement un plus petit que tous les autres.

Cette nécessité repose sur le fait qu'on manipule ici des nombres entiers, voir la remarque à la fin.

À partir de cette propriété, le principe de récurrence est un théorème :

Théorème : Soit P_0, P_1, ..., P_n, ...une suite de propriétés telles que

a) P_0 est vraie

b) pour tout entier n, si P_n est vrai, alors P_{n+1} est aussi vraie.

Alors, pour tout $n \geqslant 0$, P_n est vraie.

Supposons au contraire que pour un certain entier n, P_n soit fausse. On note alors $A = \{k \in \mathbb{N}, P_k \text{ est fausse }\}$, qui est donc un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
D'après la propriété précédente, A admet donc un plus petit élément, que l'on note m, et on a donc

- *$m \in A$, ce qui signifie que P_m et fausse*
- *$m - 1 \notin A$, ce qui signifie que P_{m-1} n'est pas fausse, donc est vraie.*

Or, on sait que, comme P_{m-1} est vraie, la propriété suivante P_m doit aussi être vraie ce qui est contradictoire.
Ainsi, il n'existe pas d'entier n tel que P_n soit fausse, ou encore P_n est vraie pour **tous** *les entiers n.* $\square$

Remarque : Le point clé du principe de récurrence est la **dénombrabilité** : on numérote les propriétés P_n avec les **entiers naturels**, pour lesquels on a la propriété d'existence du plus petit élément.

Pour les nombres réels, cette propriété est fausse : tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non-vide, n'admet pas nécessairement un plus petit élément. Par exemple, le sous-ensemble $E =]0;3]$ n'en admet pas.
$0 \notin E$ et pour tout nombre réel $x \in E$, on peut trouver un réel y tel que $y \in E$ et $y < x$: on peut par exemple prendre $y = \dfrac{x}{2}$ car pour tout nombre $x \in E$, $y = \dfrac{x}{2} \in E$ et $y < x$.
Ainsi, aucun nombre x de E ne peut être le plus petit élément, on peut toujours en trouver un plus petit.