

Table des matières

I	Révisions	1
II	Principe de récurrence	2
III	Limite d'une suite	3
1)	Définition et exemples	3
2)	Limites usuelles	4
3)	Opérations sur les limites	5
4)	Autres théorèmes de convergence	6
a)	Théorèmes de comparaison	6
b)	Suites minorées, majorées et bornées	7
c)	Point fixe	7
5)	Suites arithmétiques et géométriques	8

I Révisions

Exercice 1 Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n - 1$.

1. Donner u_0 , u_1 et u_2 .
2. Exprimer en fonction de n : a) u_{n-1} b) u_{n+1} c) $u_{n+1} - u_n$
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
4. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

Exercice 2 Préciser si les suites suivantes (u_n) sont arithmétiques, géométriques, ou ni l'un ni l'autre.

- a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
- b. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 5$.
- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n + 1}$.
- d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3^{2n+1}}{2n}$.
- e. $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 4$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n + 1}{n^2 + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
2. Etudier le sens de variation de f et en déduire celui de (u_n) .
3. Calculer u_{10} , u_{100} , u_{10000} , u_{10^8} et $u_{10^{16}}$.

Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient de plus en plus grand ?

Exercice 4 Même exercice avec les suites (u_n) définies pour tout entier naturel n par

$$1) u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad 2) u_n = 3n^2 + 4n - 5. \quad 3) u_n = -n^3 + 6n^2 - 9n + 5.$$

Exercice 5 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$.

Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, puis tracer \mathcal{C}_f et placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C}_f de f .
- Construire sur le graphique précédent les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 .
- Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite. *Ces résultats seront démontrés plus tard...*

Exercice 7 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n , on pose $v_n = \frac{3}{u_n}$.

- Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction n .

Exercice 8 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}$.

Pour tout entier n , on pose $v_n = 2u_n + 1$.

- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
- En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction n .

II Principe de récurrence

Exemple : On considère la suite (u_n) définie pour par $u_0 = 2$, puis pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n , $u_n \geq 0$.

Il y a ici une **infinité** de relation algébrique, il s'agit de montrer la relation $u_n \geq 0$ **pour tout** $n \geq 0$, c'est-à-dire pour $n = 0, n = 1, n = 2, \dots, n = 10, n = 112, \dots$

Pour démontrer cette infinité de relation, on peut déjà commencer par le **vérifier** au début, pour les premiers termes :

- pour $n = 0$, $u_0 = 2$, et donc la propriété est bien vraie, $u_0 \geq 0$.
- pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{u_0 + 5} = \sqrt{2 + 5} = \sqrt{7} \geq 0$, et la propriété est toute aussi vraie
- pour $n = 2$, $u_2 = \sqrt{u_1 + 5} \geq 0$, car $u_1 \geq -5$
- ...

Pour traiter le problème d'une manière plus générale, on peut remarquer que, **tant que** le terme $u_n \geq -5$, alors le terme suivant u_{n+1} est bien défini, et étant une racine carrée, il est positif ou nul.

Or, étant positif ou nul, il est aussi supérieur à -5 , donc son successeur est bien défini, et donc positif, donc son successeur ...

Cette propriété est une propriété d'**hérédité** :

Si on suppose qu'à un rang n , on a $u_n \geq 0$, alors, **au rang suivant**, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \geq \sqrt{0 + 5} = \sqrt{5} \geq 0$.

En d'autres termes, si la propriété est vraie à un rang n , elle est aussi vraie au rang $n + 1$ suivant.
 Or, nous avons vu que cette propriété est vraie **initialement** au rang $n = 0$ (car $u_0 = 2 \geq 0$), et donc, d'après cette hérédité, elle est aussi vraie au rang $n + 1 = 1$, puis aussi au suivant, $n + 1 = 2$, puis au suivant, puis ..., puis ...

On a ainsi démontré que la relation $u_n \geq 0$ est vraie à tous les rangs n .

Ce raisonnement s'appelle un **raisonnement par récurrence**.

Principe du raisonnement par récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n . Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de :

1. **Initialisation** : vérifier que pour le premier entier n_0 , $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité de la propriété** : montrer que, si on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier n (**hypothèse de récurrence**), alors $P(n + 1)$ est encore vraie.
3. **Conclusion** : On conclut alors que, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
 Montrer que, pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Exercice 11 Soit la suite v définie par $v_0 = 2$, puis pour tout entier n , $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.
 Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

Exercice 12 *Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.*

- a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13 Soit n un entier naturel non nul, et S_n la somme $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$.

1. Ecrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier naturel choisi par l'utilisateur.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{n+1}$
3. a) Vérifier que $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$
 b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

Exercice 14 Soit a un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 15 Soit u la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2(u_n - 1)$.
 Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de u_n .
 Démontrer alors cette conjecture.

Exercice 16 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.
 Démontrer que cette suite est monotone.

III Limite d'une suite

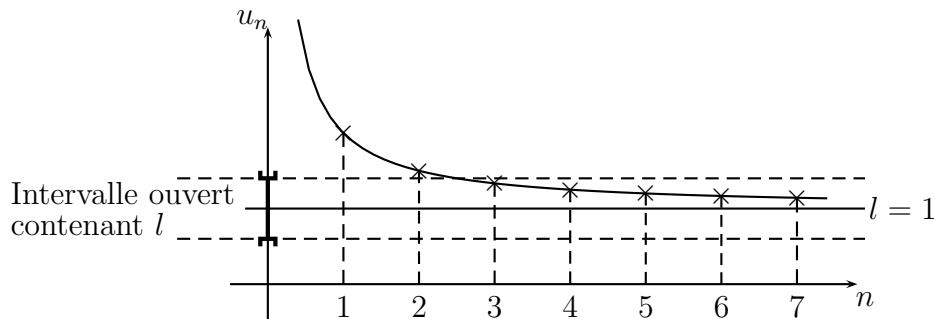
1) Définition et exemples

Définition La suite numérique (u_n) converge vers le réel l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou encore $\lim u_n = l$.

Remarque : Cette condition : "tout intervalle ouvert" est très forte car elle permet, entre autre, que l'intervalle puisse être arbitrairement petit.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n} + 1$.



Soit par exemple l'intervalle ouvert $I =]0,99 ; 1,01[$ contenant $l = 1$. Alors,

$$u_n \in I \iff 0,99 < u_n < 1,01 \iff 0,99 < \frac{1}{n} + 1 < 1,01 \iff -0,01 < \frac{1}{n} < 0,01 \iff n > \frac{1}{0,01} = 100$$

Ainsi, dès que $n > 100$, tous les termes u_n sont dans l'intervalle ouvert $I =]0,99 ; 1,01[$.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- Définition**
- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
 - On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

2) Limites usuelles

Propriété $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = 0$.

Démonstration: Par exemple pour la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2$.

Soit I un intervalle ouvert quelconque de la forme $I =]A; +\infty[$, avec A un réel strictement positif.

$$u_n \in I =]A; +\infty[\iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A} \text{ (car } A > 0\text{)}.$$

Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$, alors, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \in I$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad \square$$

Propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

et plus généralement, pour tout entier p non nul $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Démonstration: Par exemple pour la suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Soit I un intervalle ouvert quelconque de la forme $] -\varepsilon; +\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.

$$u_n \in I \iff -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Soit n_0 un entier tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$, alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \in I$, et donc la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. □

3) Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels.

Le point d'interrogation correspond à une forme indéterminée, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

Théorème Limite de la somme $u_n + v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = 3 + 2n - \frac{1}{n^3}$.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \end{array} \right\} \text{Par addition des limites} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Théorème Limite du produit $u_n \times v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	$(\text{r\`egle des signes du produit})$	$(\text{r\`egle des signes du produit})$?

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right) (1 + n^2)$.

Par sommes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n^2) = +\infty$, puis par limite du produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème Limite de l'inverse $\frac{1}{u_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$L \neq 0$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} =$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$. Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$, et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Théorème Limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	$+\infty$ ou $-\infty$	$L \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	?	?

Méthode en cas de forme indéterminée : On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)

Par exemple, soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 - 2n + 4$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n = -\infty$, donc on a une forme indéterminée pour la limite de la somme.

Néanmoins, $u_n = n^2 \left(1 - \frac{2n}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right) = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$,

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 1$, d'où, par produit des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : n^2 est le terme dominant en $+\infty$ dans l'expression de u_n . C'est lui qui impose son comportement en $+\infty$, ce qui apparaît clairement quand on le factorise.

Exercice 17 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \frac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \frac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \frac{2n^2 + 1}{-n^2 + 6}$ f) $u_n = \frac{n^2 + 3n - 5}{n^3 - 6n^2 + 1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\frac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$ j) $u_n = \frac{9 - n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \frac{1}{3} - \frac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \frac{2}{3n} - \frac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

4) Autres théorèmes de convergence

a) Théorèmes de comparaison

Théorème Théorème des gendarmes pour les suites

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n .$$

Si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Corollaire Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n , $u_n \geq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 18 D'après BAC

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

- Etudier le sens de variation de (u_n) .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n = (n + 1)^2$.
- En déduire que, pour tout entier n , $u_n \geq n^2$.
- La suite (u_n) est-elle minorée? majorée? Justifier.
- Donner la limite de (u_n) .

Exercice 19 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier n , par $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n - 2$.

- Quelle est la valeur retournée lors de l'appel `fonction(3)` de la fonction python ci-contre?
 - Qu'affiche l'instruction suivante?
`for i in range(10): print(fonction(i))`

```
def fonction(n) :
    a=1
    for p in range(n) :
        a=1/3*a+p-2
    return(a)
```

- Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 7$, on a $a_n \geq n - 3$.
- En déduire la limite de la suite (a_n) .

b) Suites minorées, majorées et bornées

Définition Une suite (u_n) est dite :

- **minorée** lorsque qu'il existe un réel m tel que, pour tout entier n , $u_n \geq m$.
- **majorée** lorsque qu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n , $u_n \leq M$.
- **bornée** lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire lorsqu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier n , $m \leq u_n \leq M$.

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(n) + n$.

Alors, pour tout entier n , comme $\sin(n) \geq -1$, $u_n = \sin(n) + n \geq -1 + n \geq -1 + 0 = -1$.

Ainsi, cette suite (u_n) est minorée par $m = -1$.

De plus, pour tout entier n , $u_n = \sin(n) + n \geq -1 + n$, ce qui montre que la suite (u_n) n'est pas majorée, et donc n'est pas bornée non plus.

Remarque : Tout nombre inférieur à m est aussi un minorant.

En effet, pour tout entier n on a aussi par exemple, $n, u_n \geq -10 \geq -210 \geq \dots$

Ex : • (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2$, alors (u_n) est bornée : $\forall n \geq 1, -1 \leq u_n \leq 5$.

- (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{2+n}$ est bornée, car, $\forall n \geq 0, 0 \leq v_n \leq \frac{3}{2}$

Théorème Toute suite monotone et bornée est convergente :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge, mais ne fournit aucun moyen pour déterminer cette limite.

Exercice 20 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$

- Montrer que (u_n) est décroissante.
- Montrer que la suite (u_n) est minorée.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Point fixe

Théorème Point fixe

Soit une suite (u_n) définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers un réel l , alors, la limite l vérifie la relation $f(l) = l$.
 l s'appelle un point fixe pour la fonction f .

Exercice 21 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que cette suite est croissante.
2. Montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer la limite l de la suite (u_n) .

Exercice 22 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{2}x$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, puis pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Appliquer le théorème du point fixe à la suite (u_n) .
2. Calculer u_0 , u_1 et u_2 et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
Démontrer cette conjecture. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite?

Exercice 23 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , par $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$.

1. a) Dans un repère orthonormal (unité graphique 4cm), tracer la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe \mathcal{C}_f représentant la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$.
b) Placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer aucun calcul, les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
c) Quelle conjecture peut-on faire sur la suite u .
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
b) Démontrer que la suite u est croissante, et en déduire qu'elle converge.
c) Déterminer alors la limite de la suite u .

Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe \mathcal{C}_f de f .
b) Construire sur le graphique précédent les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
c) Conjecturer le sens de variation de la suite et sa limite.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , on a $u_n > 0$.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite l . Déterminer l .

3. On considère la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Écrire un algorithme/programme qui permet de calculer S_n pour n quelconque donné.
Calculer S_{100} .

Exercice 25 Soit (S_n) et (T_n) les deux suites définies, pour tout entier naturel n , par

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1. a. Pour tout entier n , exprimer S_n en fonction de n .
 b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
2. a. Montrer que la suite (T_n) est croissante.
 b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = \frac{S_n + T_n}{3}$.
 c. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $T_n \leq 1$.
 d. En déduire que la suite (T_n) converge vers un réel l . Déterminer l .

5) Suites arithmétiques et géométriques

Propriété Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$ et

- si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exercice 26 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Pour tout entier n , on pose $v_n = \frac{3}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 27

1. Soit a un réel strictement positif.
 Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 1$.
 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème Soit q un réel, alors

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 1$ pour tout entier n , et donc aussi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Démonstration: Soit $q > 1$, alors $a = q - 1 > 0$, et on a démontré à l'exercice 20 que, pour tout entier n , $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Or, comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$, et alors, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$. □

Exercice 28 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$ et la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 8$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. En déduire l'expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .

3. Déterminer les limites des suites (v_n) et (u_n) .

Exercice 29 Soit la suite u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1^{ère} méthode a) vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$.

c) Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$, et en déduire le sens de variation de u .

d) Démontrer que u converge et déterminer sa limite l .

2^{ème} méthode On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Prouver que v est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer pour tout n , v_n puis u_n en fonction de n .

c) En déduire la convergence de u et sa limite.