Produit scalaire dans l'espace

I - Rappels - Produit scalaire dans le plan

Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u},\vec{v})$

Conséquence : Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, car $\cos(\vec{u},\vec{u}) = \cos(0) = 1$.

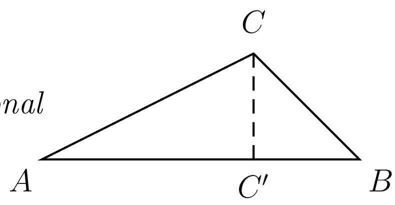
Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout réel k,*

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Exercice 1 A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.
Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

Propriété *(Produit scalaire et projection)*

Soit A, B et C trois points, et C' le projeté orthogonal de C sur (AB), alors, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$



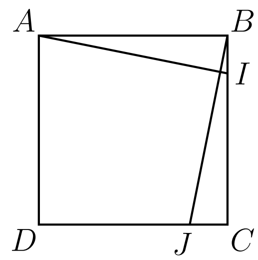
Propriété $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big]$

Démonstration: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

d'où, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big]$ □

Propriété $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \quad ou\,,\ \vec{v} = \vec{0} \\ ou\,,\ \vec{u}\perp\vec{v} \end{cases}$

Exercice 2 Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendicualires.



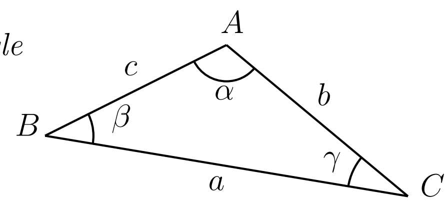
Exercice 3 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 3$ cm.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -6$.

Théorème *(Al-Kashi, ou Pythagore généralisé) Dans un triangle ABC quelconque, on a :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$



Corollaire *(Théorème de Pythagore) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si* $a^2 = b^2 + c^2$.

Démonstration: $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

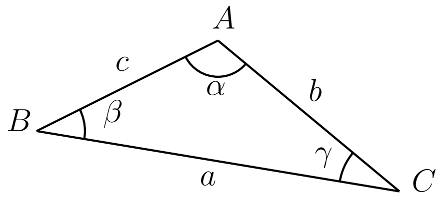
$$= c^2 + b^2 + 2\cos(\pi - \alpha)$$
$$= c^2 + b^2 - 2\cos\alpha$$

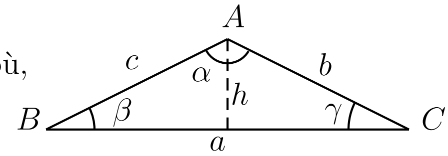
Le théorème de Pythagore est alors un corollaire direct :
ABC rectangle en $A \iff \alpha = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff \cos\alpha = 0 \iff a^2 = b^2 + c^2$. □

Théorème *(Formule des sinus) L'aire d'un triangle ABC quelconque, est donnée par*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

et de plus, $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$





Démonstration: L'aire de ABC est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ah$, avec $h = c\sin\beta$, d'où,
$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$.
En procédant de même (par permutation circulaire), on obtient les autres formules.

Enfin, en divisant chaque terme par $\dfrac{1}{2}abc$, on obtient : $\dfrac{\mathcal{A}}{\frac{1}{2}abc} = \dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$ □

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $\widehat{A} = 120°$.
Calculer toutes les longueurs et angles de ce triangle.

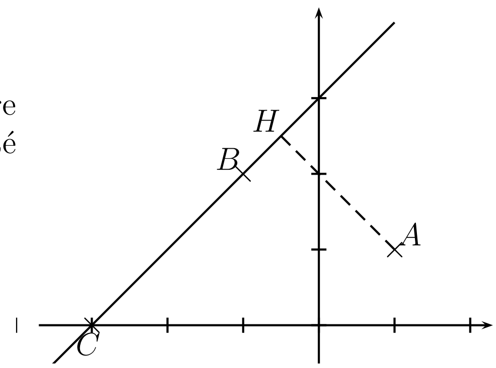
Propriété *Soit dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$*

Remarque : On a alors aussi, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$, soit, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 5 Reprendre l'exercice 2, et donner dans le repère orthonormal $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure.
Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 6 Dans un RON (repère orthonormal), on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$. Soit de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

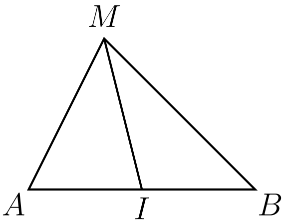
1) Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.
2) Calculer la longueur BH.



Théorème *(de la médiane)*
Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$, alors pout tout point M,

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 - \frac{1}{2}AB^2$$

Démonstration:



Pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ et donc, en utilisant le carré scalaire, $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)^2=\left(2\overrightarrow{MI}\right)^2$
soit, $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MI}^2$
ou encore $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

De plus,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{=\overrightarrow{0}}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=MI^2-\frac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

Finalement, $MA^2+MB^2=4MI^2-2\left(MI^2-\frac{1}{4}AB^2\right)=2MI^2-\frac{1}{2}AB^2$ □

II - Produit scalaire et géométrie analytique du plan

1) Equation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Définition *Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite d signifie que la direction de $\vec{n}$ est orthogonal à d.*

Conséquence : Ainsi, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, on a $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.

Si A est un point de la droite d, alors d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Propriété *(1) Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$.*

(2) L'ensemble d d'équation $ax+by+c=0$, où a et b sont des réels non tous les deux nuls, est la droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

Démonstration: Soit $\vec{n}(a;b)$, $A(x_A;y_A)$ un point de d, et $M(x;y)$ un point quelconque du plan, alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_B)$, donc,
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff a(x-x_A)+b(y-y_B)=0 \iff ax+by+c=0$, avec $c=-ax_A-by_B$. □

Exercice 7 *(15 p 344)* ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 8 Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

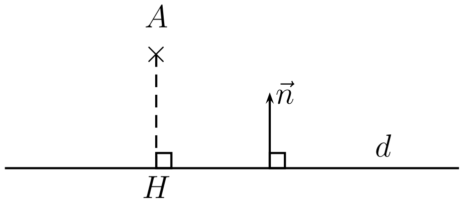
a) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.

b) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C (on pourra tout d'abord déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $\overrightarrow{AB}$).

Exercice 9 *(16 p 344)* ABC est un triangle tel que $A(1;-2)$, $B(4;3)$ et $C(-2;1)$.

Calculer les coordonnées de l'hortocentre du triangle ABC.

2) Distance d'un point à une droite



Propriété *Soit d la droite d'équation $ax+by+c=0$ (avec $(a;b)\neq(0,0)$), et A le point de coordonnées $(x_A;y_A)$, alors, la distance de A à d est égale à* $\dfrac{|ax_A+bx_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration: La distance de A à d est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur d.

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}(a;b)$ qui est aussi normal à d, et donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{n}$.

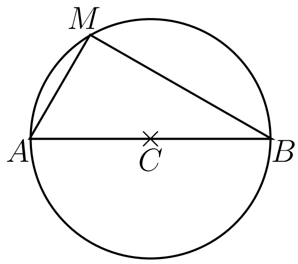
On cherche alors $AH=\|\overrightarrow{AH}\|=|\lambda|\|\vec{n}\|=|\lambda|\sqrt{a^2+b^2}$.

On a, $\overrightarrow{AH}(\lambda a;\lambda b)$, et comme $\overrightarrow{AH}(x_H-x_A;y_H-y_A)$, on a donc, $x_H=\lambda a+x_A$ et $y_H=\lambda b+y_A$.

De plus, $H\in d$, et donc, $ax_H+bx_H+c=0$, d'où,
$a(\lambda a+x_a)+b(\lambda b+y_B)+c=0 \iff \lambda=-\dfrac{ax_A+by_B+c}{a^2+b^2}$.

et finalement, $AH=|\lambda|\|\vec{n}\|=|\lambda|\sqrt{a^2+b^2}=\left|-\dfrac{ax_A+by_B+c}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_A+bx_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

3) Equation d'un cercle



Propriété *1) Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.*
2) Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(x_C;y_C)$ et de rayon R a pour équation $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2$.

Démonstration:

1) Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, et $M(x;y)$ alors, $\overrightarrow{MA}(x-x_A;y-y_A)$ et $\overrightarrow{MB}(x-x_B;y-y_B)$.
On a alors $M(x;y)\in\mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff \underline{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$.

2) Soit $C(x_C;y_C)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$ de rayon $R\geq 0$.
Alors, $\overrightarrow{CM}(x-x_C;y-y_C)$ et $M(x;y)\in\mathcal{C}\iff MC^2=R^2 \iff \underline{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2}$ □

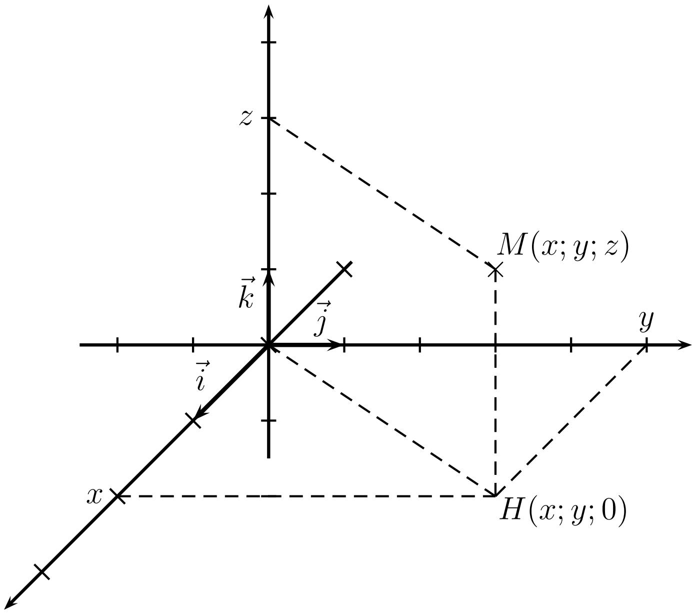
Exercice 10 Soit dans un RON, les points $I(3;-1)$ et la droite d d'équation $-x+y+1=0$.

a) Calculer la distance du point I à la droite d.
b) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I est tangent à d.

Exercice 11 Dans un RON, on considère la droite d d'équation $x+2y-2=0$ et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(-3;5)$ et $B(1;-1)$.

1) Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ et d.
2) Calculer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d.

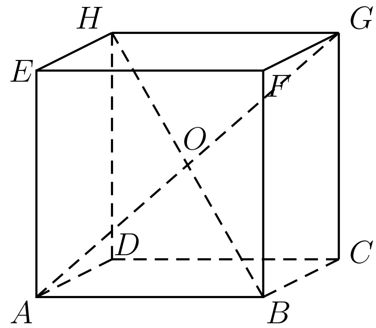
III - Géométrie analytique dans l'espace



Pour tout point M de l'espace, il existe un **unique** triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

On note $M(x;y;z)$ les coordonnées du point M.



Exercice 12 $ABCDEFGH$ est un cube.

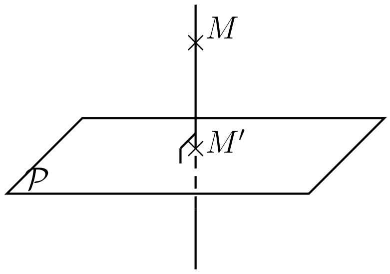
1) Déterminer dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points.
2) Déterminer les longueurs AC, OG et BG.
3) Le triangle HAF est-il rectangle en A ?

Définition *(Vecteurs coplanaires) Dire que les vecteurs* $\vec{}$, $\vec{v}$, *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires signifie qu'ils peuvent être placés dans un même plan : les points* O, A, B *et* C *tels que* $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ *et* $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ *sont dans un même plan.*

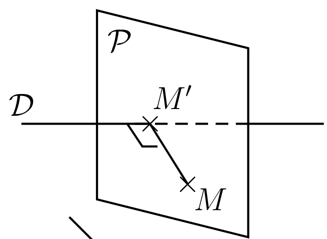
Propriété *Les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires si et seulement si il exsite des réels* a *et* b *tels que* $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

IV - Produit scalaire dans l'espace

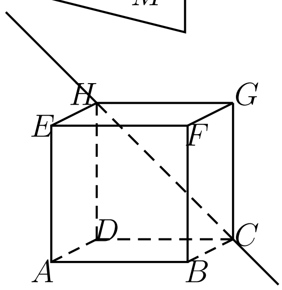
1) Projections orthogonales dans l'espace



Définition *Soit* $\mathcal{P}$ *un plan et* M *un point de l'espace.*
Le projeté orthogonal de M *sur le plan* $\mathcal{P}$ *est le point* M' *intersection de la droite* Δ *passant par* M *est perpendiculaire à* $\mathcal{P}$.



Définition *Soit* $\mathcal{D}$ *une droite et* M *un point de l'espace.*
Le projeté orthogonal de M *sur la droite* $\mathcal{D}$ *est le point* M' *intersection de* $\mathcal{D}$ *et du plan* $\mathcal{P}$ *perpendiculaire à* $\mathcal{D}$.

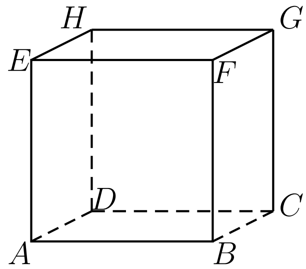


Exercice 13 $ABCDEFG$ est un cube. Déterminer le projeté orthogonal A' du point A sur la droite (HC).
(Indication : quelle est la nature du triangle AHC, *et que représente dans ce triangle la droite* (AA')*)*

2) Produit scalaire dans l'espace

Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.*
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

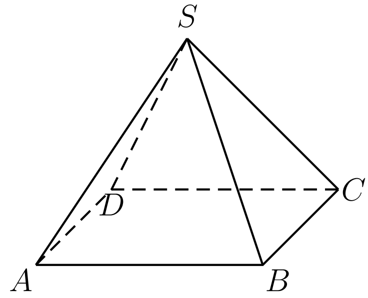
Remarque : Si les points A, B et C ne sont pas alignés, il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.



Exemple : Dans le cube $ABCDEFG$ d'arête a,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$$

$$\text{et,} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$$



Exercice 14 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les arêtesont la même longueur a. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$ *b)* $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$

c) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$ *d)* $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$

V - Expressions et propriétés du produit scalaire dans l'espace

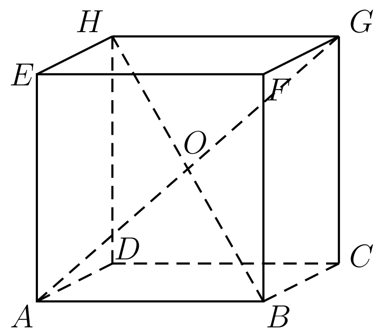
Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
- Le calcul du produit scalaire à l'aide d'une projection.
- Les règles de calcul : symétrie, associativité, distributivité, linéarité.

Il faut néanmoins adapter l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées :

Propriété *Dans un RON de l'espace, soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$



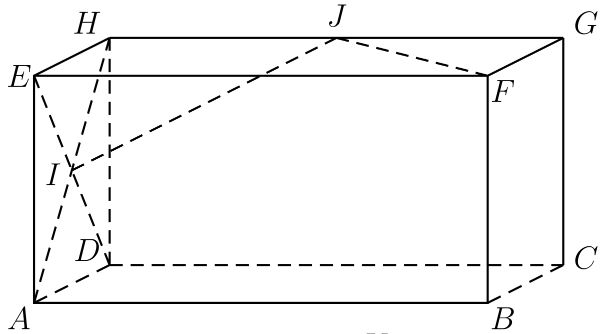
Exercice 15 $ABCDEFGH$ est un cube de centre O et d'arête a.
1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ *b)* $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BA}$ *c)* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

2) Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points et retrouver a).
3) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HOG}$.

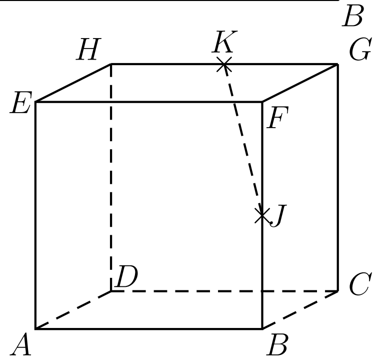
Exercice 16 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ cm et $AB = 2$ cm

I est le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.



a) Donner, dans le RON $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des points I, J et F. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$.

b) Déterminer l'angle, au dixième de degré près, $\widehat{IJF}$.



Exercice 17 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
J et K sont les milieux respectifs des segments $[FB]$ et $[GH]$.
Calculer JK.

VI - Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

Définition *Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles menéees par un point quelconque sont perpendiculaires.*

Propriété
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$*
- *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.*

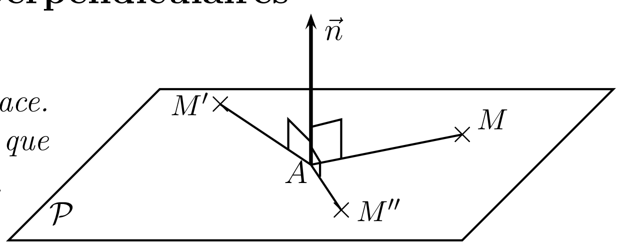
2) Droites et plans perpendiculaires

Définition *Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

Propriété *Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{u}$.*

3) Vecteur normal à un plan et plans perpendiculaires

Propriété *Soit $\vec{n}$ un vecteur et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$.*



Corollaire *Dans un repère orthonormal,*

(1) Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration: Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $M(x;y;z)$ alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$
et $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff ax+by+cz+d=0$, en posant $d=-ax_A-bx_B-cx_C$. □

Définition *Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.*

Exercice 18 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-y+3z-1=0$, et le point A a pour coordonnées $(0;-1;-4)$. On note de plus H le projeté orthgonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.
b) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$.
c) Déterminer k en exprimant que H appartient à $\mathcal{P}$.
En déduire les coordonnées de H et la distance AH de A au plan $\mathcal{P}$.

VII - Applications du produit scalaire

1) Distance d'un point à un plan

Propriété *Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. La distance du point $A(x_A;y_A;z_A)$ au plan $\mathcal{P}$ est la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$,*

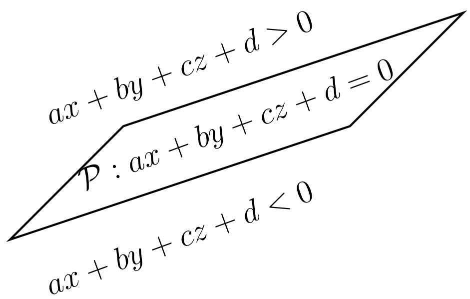
$$AH=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration: $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}(a;b;c)$, et donc, il existe un nombre λ tel que $\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{n}$, et ainsi, $(x_H-x_A;y_H-y_A;z_H-z_A)=(\lambda a;\lambda b;\lambda c)$, d'où, $x_H=x_A+\lambda a$, $y_H=y_A+\lambda b$ et $z_H=z_A+\lambda c$.

De plus, $H\in\mathcal{P}$, d'où, $ax_H+by_H+cz_H+d=0 \iff a(x_A+\lambda a)+b(y_A+\lambda b)+c(z_A+\lambda c)+d=0$ et donc, $\lambda=\dfrac{ax_A+by_A+cz_A}{a^2+b^2+c^2}$.

On a aussi $AH=|\lambda|\Delta\|\vec{n}\|=|\lambda|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, d'où la formule de la propriété. □

2) Inéquation caractérisant un demi-espace



Propriété *Dans un repère orthonormal, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $ax+by+cz+d\geqslant 0$ (resp >0), avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, est le demi-espace fermé (resp. ouvert) délimité par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$.*

Exercice 19 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation : $5x-\dfrac{y}{2}+z+\dfrac{1}{3}=0$.

Déterminer une inéquation du demi-espace fermé de frontière $\mathcal{P}$ contenant le point B de coordonnées $(-1;2;3)$.

Exercice 20 On considère dans un RON, les points $A(-1;-1;-1)$, $B(0;-2;0)$ et $C(-2;1;0)$.

Montrer que le vecteur $\vec{n}(3;2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), et déterminer une équation de ce plan.

Exercice 21 *(60 p 349)*

L'espace est muni d'un RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. A et M sont les points de coordonnées respectives $(1;-5;7)$ et $(1;1;1)$.

$\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne : $-2x+y+z-4=0$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ soit le point A.

b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont perpendiculaires.

c) Calculer les distances du point M au plan $\mathcal{L}$ et du point M au plan $\mathcal{P}$.

d) Déduire des questions précédentes la distance du point M à la droite Δ intersection des plans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 22 *(D'après Bac 2003)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Calculer le volume du trétraèdre $ABCD$.
4. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ en radians.
5. a. Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).