Probabilités

$T^{\text{ale}}S$

"Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité."

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

I - Vocabulaire des probabilités

Définitions:

- *Une* **expérience** *est dite* **aléatoire** *lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.*
- *On appelle univers, noté en général* Ω*, l'ensemble des issues ou résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
- *Un* **événement** *est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble de résultats possibles.*
- *Un* **événement élémentaire** *est un événement qui ne contient qu'un seul élément.*

Exercice 1 On lance un dé à six faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.
Les résultats possibles sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers est l'ensemble des six résultats : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
"Obtenir un 6", "Obtenir un nombre pair", et "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" sont des événements qui peuvent s'écrire $E_1 = \{6\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ et $E_3 = \{4, 5, 6\}$.
E_1 est de plus un événement élémentaire.

Exercice 2 On tire une carte "au hasard" dans un jeu de 32 cartes.
L'univers est constitué de 32 événements élémentaires.

L'événement : E="Tirer un roi" est-il un événement élémentaire ?

Définitions:

- *On appelle* **événement contraire** *de l'événement A, l'événement noté* $\overline{A}$ *contenant tous les éléments de l'univers* Ω *ne se trouvant pas dans A.*
- *On appelle* **réunion** *de A et B, l'événement noté* $A \cup B$ *contenant tous les éléments de A et tous ceux de B.*
- *On appelle* **intersection** *de A et B, l'événement noté* $A \cap B$ *contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.*
- *Deux événements sont dits* **incompatibles** *lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire lorsqu'ils ne peuvent être réalisés simultanément.*

Exercice 3 On lance un dé à six faces.
Soit A l'événement : "Obtenir un nombre impair", c'est-à-dire $A = \{1, 3, 5\}$, alors son événement contraire est $\overline{A} = \dots$

Soit E l'événement "Obtenir un 3 ou un 5", soit $E = \{3, 5\}$, alors

$\overline{E} = \dots$ $\qquad A \cup E = \dots$ $\qquad A \cap E = \dots$

Exercice 4 On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on considère les événements :
A="tirer un cœur", B="tirer un dix" et C="tirer une figure".

Décrire les événements :
$\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$.

Exercice 5 J'achète trois billets de tombola.

1. Quel est le contraire de l'événement *"tous mes billets sont gagnants"* ?
2. Quel est le contraire de l'événement *"j'ai exactement un billet gagnant"* ?

II - Probabilité d'un événement

1) Définitions

Définition *La* **probabilité d'un événement** *est un nombre qui mesure les "chances" que cet événement a de se produire sur une échelle de 0 (événement impossible) à 1 (événement certain).* **Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.**

Définition *Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'univers des possibilités d'une épreuve aléatoire, où chaque e_i désigne une issue (ou événement élémentaire).*

Définir une **loi de probabilité** *sur l'univers Ω c'est associer à chaque issue e_i un nombre réel p_i tel que :* $0 \leq p_i \leq 1$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$

Propriété **Loi des grands nombres** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n tendent vers P quand n tend vers l'infini.*

Exemple Sur $n = 10$ expériences de lancer d'un dé non pipé, on a obtenu 3 fois le chiffre 6, sur n=100 expériences , on l'a obtenu 18 fois,...
Lorsqu'on augmente le nombre n d'expériences réalisées, la fréquence d'apparition du chiffre 6 tend vers la probabilité qui est de $p = \dfrac{1}{6} \simeq 1,666$: $\underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n = p}$.

n	nombre de 6	fréquence f_n
10	3	$0,3$
100	18	$0,18$
1000	169	$0,169$
10 000	1661	$0,1661$

2) Calcul de probabilité

Définition *On dit qu'il y a* **équiprobabilité**, *ou encore que la loi de probabilité est équirépartie, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité :* $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$

Propriété *La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.*

Corollaire *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :*

$$\boxed{P(A) = \frac{\textit{card } A}{\textit{card } \Omega} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}}$$

Exercice 6 Dans l'expérience de lancer de dé, on considère l'événement A="obtenir un nombre pair". Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et A est constitué des trois événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.

La probabilité de A est donc : $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

3) Combinaisons

Exercice 7 De combien de façons différentes peut-on ordonner les nombres entiers de 1 à 3 ? Les nombres entiers de 1 à 4 ? De 1 à n ?

Définition *Soit n un entier naturel. On appelle* **factorielle** *n, noté $n!$, le nombre :*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1\,.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Propriété *Il y a $n!$ façons différentes d'ordonner n éléments.*

Démonstration: Il y a n façons de choisir le premier éléments, puis $(n-1)$ façons de choisir le deuxième, ..., soit au total, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ façons. $\square$

Propriété *Soit n et p des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, et E un ensemble à n éléments.*

Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ ("n parmi p"), est

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

<u>Démonstration:</u> • On doit choisir p éléments parmi les n de E.

On a n choix possibles pour le premier, $(n-1)$ pour le deuxième, ..., $(n-(p-1)) = (n-p+1)$ pour le p-ième.

On a donc, $n(n-1)\dots(n-p+1)$ choix au total.

Néanmoins, l'ordre des p éléments étant indifférent, ces $n(n-1)\dots(n-p+1)$ choix sont répétés $p!$ fois.

Ainsi, le nombre de combinaisons $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

De plus, $$\begin{aligned}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \times \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 2\times 1}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\end{aligned}$$

□

<u>Exemple :</u> $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{\cancel{6}\times 5\times \cancel{4}\times 3}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1} = 15$: il y a 15 façons de choisir 4 éléments parmi 6.

Exercice 8 On tire au hasard cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

a) Combien de mains différentes peut-on former ?
b) Quel est le nombre de mains différentes qui contiennent les 4 as ?
c) En déduire la probabilité d'avoir un carré d'as.

Exercice 9 *(20 p432)* On lance une pièce de monnaie équilibrée 10 fois de suite.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 6 fois "pile".

Exercice 10 Au Loto national, un joueur coche 6 numéros sur une grille où figurent les nombres de 1 à 49.

a) De combien de façon le joueur peut-il remplir sa grille ?
b) Quelle est la probabilité de jouer la grille gagnante ?

Exercice 11 Une urne contient 4 boules rouges et 5 boules vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur.

Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.

Calculer cette même probabilité si après le premier tirage, la boule tirée esr replacée dans l'urne.

4) Propriété des combinaisons

Propriété *Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$,* $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$.

<u>Démonstration:</u> Soit E un ensemble à n éléments. A chaque partie A de E à p éléments, on peut associer la partie $\overline{A}$ à $(n-p)$ éléments.

Il y a donc autant de parties à p éléments que de parties à $(n-p)$ éléments. □

Exercice 12 Démontrer cette propriété par le calcul.

Propriété *Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$,*

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2 +	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			...	...		

Démonstration: Soit E un ensemble à n éléments. On note a un élément fixé de E.

Pour dénombrer les parties de E à p éléments, on peut distinguer :

- les parties contenant a : il reste à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants; il y en a $\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$
- les parties ne contenant pas a : il s'agit donc de choisir p éléments parmi les $n-1$ restants; il y en a donc au total $\begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}$

Comme il y a en tout $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ parties à p éléments, on a bien la formule de la propriété. □

Exercice 13 Démontrer par le calcul cette formule *(Bac 2009)*.

Propriété Formule du binôme
Pour tous nombres complexes a et b, et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

Démonstration: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$.

Dans le développement de $(a+b)^n$ le terme en b^k est obtenu en choisissant b dans exactement k parenthèses et a dans les $n-k$ autres parenthèses. Ce terme est ainsi de la forme $a^{n-k}b^k$. Il y a de plus $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisirs les k parenthèses dans lesquelles on va prendre b.

Le terme contenant b^k est donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k$. □

Exercice 14 $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} a^{2-k}b^k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} a^2b^0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a^1b^1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} a^{3-k}b^k = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} a^3b^0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} a^2b^1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} a^1b^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exercice 15 Démontrer par récurrence la formule du binôme.

Exercice 16 Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$

III - Propriétés des probabilités

Propriété *Soit A et B deux événements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*

Dans le cas particulier où les événements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cap B) = 0$, et donc, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition *L'évènement contraire $\overline{A}$ de l'évènement A est tel que $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.*

Propriété *Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$*

Démonstration: Les événements A et $\overline{A}$ sont en particulier incompatibles, donc $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

Or, $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, on en déduit que $1 = P(\overline{A}) + P(A)$. □

Exercice 17 On donne les probabilités de deux événements A et B : $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. Quelle est la probabilité de $\overline{A} \cap \overline{B}$?
3. Quelle est la probabilité de $\overline{A} \cup \overline{B}$?

	B	$\overline{B}$	Total
A	$0,1$		$0,5$
$\overline{A}$			
Total	$0,4$		

Exercice 18 La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.

De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

a) Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.

b) En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.

Exercice 19 *Vrai ou faux*

a) Si A et B sont contraires alors $P(A \cap B) = 0$.
b) Si A et B sont incompatibles alors $p(A) = 1 - P(B)$.
c) Si A et B sont contraires alors $P(A) + P(B) = 1$.
d) Si $P(A \cup B) = 1$, alors A et B sont contraires.
e) Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, alors A et B sont contraires.
f) Si A et B sont incompatibles alors $P(A) + P(B) \leq 1$.

IV - Probabilité conditionnelle

Définition *Soit A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.*
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice 20 Dans une population, 60 % des familles ont une voiture, 65 % des familles ont un téléviseur et 24 % des familles n'ont ni voiture ni téléviseur.

On choisit une famille au hasard. Calculer la probabilité que cette famille ait une voiture sachant qu'elle possède un téléviseur.

Exercice 21 Avec les données de l'exercice 18, déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la même année.

Définition *On dit que deux événements A et B sont indépendant lorsque*

$$P_A(B) = P(B)$$

c'est-à-dire lorsque la connaissance préalable de la réalisation de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B.

Propriété *Pour deux événements A et B indépendants :*

$$P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

<u>Démonstration :</u> A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.

Or $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, d'où, $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$, soit $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

De même dans ce cas, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Exercice 22 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, et on considère les événements : A : "tirer un roi", et B : "tirer un cœur". Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 23
Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau ci-contre.

fréquences	allemand	italien	espagnol	total
garçons	0,20	0,044	0,156	0,40
filles	0,12	0,156	0,324	0,60
total	0,32	0,20	0,48	1

Une expérience aléatoire consiste à choisir un élève au hasard.

On considère les événements : A : "l'élève étudie l'allemand"
F : "l'élève est une fille"

a) Déterminer $P(A)$ et $P(F)$.

b) Déterminer la probabilité que l'élève soit une fille étudiant l'allemand.

c) Sachant que l'élève choisie est une fille, calculer la probabilité, notée $P_F(A)$, que l'élève étudie l'allemand.
Les événements A et F sont-ils indépendants ?

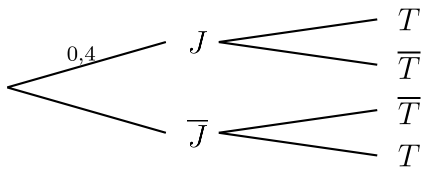
Exercice 24 Une société de 90 employés compte 60 hommes, parmi lesquels 40 sont des cadres. Dans cette société, il y a en tout 58 cadres.

Quelle est la probabilité d'être un cadre sachant qu'on est un homme dans cette société ?

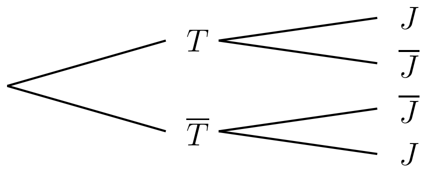
Les événements être un cadre et être un homme sont-ils indépendants dans cette société ?

Exercice 25 Une agence de sondage effectue auprès de 10 000 personnes une enquête sur le recyclage du verre. Dans cet échantillon, 40 % sont des jeunes (moins de 30 ans) et 60 % d'entre eux déclarent recycler le verre. En revanche, seulement 30 % des personnes de plus de 30 ans déclarent recycler le verre.

On choisit au hasard une personne dans l'échantillon. On note J l'événement : "la personne choisie est un jeune" et T l'événement : "la personne recycle le verre".



1. Compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer $P(J\cap T)$, $P(J\cap\overline{T})$, $P(\overline{J}\cap T)$ et $P(\overline{J}\cap\overline{T})$.
   En déduire $P(T)$.
3. a) Calculer la probabilité que la personne ait moins de 30 ans sachant qu'elle recycle le verre.
   b) Compléter l'arbre ci-contre.



Exercice 26 *(17 p403)* On jette simultanément deux dés non truqués et on considère les événements :
A : "Le total des nombres obtenus est 7"
B : "On a obtenu au moins une fois le chiffre 3"
Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 27 On suppose que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,000\,1$ et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.

Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port, sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Exercice 28 Sur une machine, deux types de panne sont possibles : la panne d'origine mécanique et la panne d'origine électronique. Un jour donné, la probabilité q'une panne mécanique survienne est de 0,005 et celle d'une panne électronique est 0,003. D'autre part, la probabilité qu'une panne mécanique apparaisse sachant qu'une panne électronique a eu lieu ce jour là est 0,002.
On note E l'événement : "la machine a une panne électronique" et M : "la machine a une panne mécanique".

1. Calculer la probabilité qu'une machine ait les deux types de pannes un jour donné.
2. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait aucune panne un jour donné.
3. a) Calculer $P_{\overline{E}}(M)$.
   b) Comparer $P_E(M)$ et $P_{\overline{E}}(M)$. Interpréter cette comparaison.

1) Formule des probabilités totales

Définition *On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est E :*

$$\text{pour } i \neq j\ ,\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et,}\quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = E$$

Remarque : Pour tout événement A de E, A et $\overline{A}$ forment une partition de E, car $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cup \overline{A} = \emptyset$.

Théorème *(Formule des probabilités totales)*
Soit B_1, B_2, ..., B_n, n événements formant une partition de E.
Alors, pour tout événement A,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2) + \cdots + P_{B_n}(A)P(B_n) \end{aligned}$$

Démonstration : Les événements $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ..., $A \cap B_n$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est A, d'où la formule.

Exercice 29 *(14 p403)* On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.
U_1 contient 7 jetons noirs et 5 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 5 jetons blancs.
On choisit au hasard une urne, puis on tire au hasard dans cette urne un jeton.

a) Calculer la probabilité que le jeton soit blanc sachant qu'il provient de U_1.
b) Calculer de même la probabilité que le jeton soit blanc sachant qu'il provient de U_2.
c) En déduire la probabilité que le jeton tiré soit blanc.

Exercice 30 *(9 p402)*

a) A et B sont deux événements indépendants. Prouver qu'alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Montrer de même que $\overline{A}$ et B sont indépendants, puis que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
b) Alain et Béatrice tentent de faire des paniers de basket. Les événements A : "Alain réussit un panier" et B : "Béatrice réussit un panier sont indépendants" et de probabilités respectives $\dfrac{4}{7}$ et $\dfrac{3}{5}$.
Alain et Béatrice font un essai chacun. Calculer la probabilité des événements suivants :
C : "Alain et Béatrice réussissent tous les deux"
D : "Seul Alain réussit"
E : "Aucun panier n'est marqué"
F : "Au moins un panier est marqué"
G : "Un panier et un seul est marqué"

V - Variable aléatoire

On associe fréquement un nombre aux résultats d'une expérience aléatoire. Par exemple, pour un jeu de hasard, on peut associer un gain (ou une perte) à chaque issue du jeu.

L'**espérance mathématique** permet dans ce cas de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard : le jeu est-il *équitable*, ou alors alors plutôt favorable à l'un des adversaires ?

Définition *Soit Ω l'univers des possibilités d'une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 31 On lance une pièce de monnaie trois fois successivement, et on note le résultat de chaque lancer. L'univers Ω de cette expérience contient $2^3 = 8$ issues possibles :
$\Omega = \{PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP,\ FFF\}$.

On considère alors le jeu suivant :

– si on obtient deux fois successivement P ou F, on gagne 1 €
– si on obtient trois fois successivement P ou F, on gagne 2 €
– sinon, on perd 3 €

La fonction X qui à chaque issue de Ω associe le gain (ou la perte) est une variable aléatoire.

Evènement	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
X	2	1	-3	1	1	-3	1	2

On peut alors indiquer la probabilité de chaque gain :

gain x_i	-3	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Avec ce jeu, le gain moyen que l'on peut espérer est : $-3\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

C'est-à-dire que, sur un très grand nombre de réalisations de ce jeu (une infinité ...), on peut espérer remporter 0,25 €par partie.

Remarque :
– La dénomination X est une "variable aléatoire" est un abus de langage : X n'est pas une variable mais une fonction, qui plus est parfaitement déterminée (donc qui n'a rien d'aléatoire).
– La notation $(X=x_i)$ désigne l'événement : "la variable aléatoire X prend la valeur x_i" ; $p(X=x_i)$ désigne alors la probabilité de cet événement.

Définition *Pour une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, avec les probabilités $p_1=p(X=x_1)$, $p_2=p(X=x_2)$, ..., $p_n=p(X=x_n)$, on définit les grandeurs :*

- *l'***espérance** *mathématique de X :* $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$
- *la* **variance** *de X :* $V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2p_i$
- *l'***écart-type** *de X :* $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exercice 32 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,25$	$0,05$		$0,15$

1) Calculer $p(X>0)$

2) Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart type.

Exercice 33 La mise de départ d'un jeu est de 2€. On lance ensuite un dé non truqué puis :
– si on obtient un 6, on gagne 5 € ;
– si on obtient un 1 ou un 3, la mise est remboursée ;
– dans les autres cas, on ne gagne rien, ni ne perd rien.

La variable X désigne le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 34 Une machine à sous au casino se compose de 3 tambours cylindriques. Sur chacun d'eux peut apparaître de façon aléatoire et équiprobable l'un des quatres symboles : un 7, un citron, un kiwi, ou une banane.

1. Quel est le nombre total de combinaisons que l'on peut obtenir ?

On mise au départ 5 € :
– si trois 7 apparaissent, on gagne vingt fois la mise de départ ;
– si trois fruits identiques apparaissent, on gagne dix fois la mise départ ;

– si deux 7 seulement apparaissent, on gagne deux fois la mise de départ ;
– dans tous les autres cas, on ne gagne rien.

2. On dispose de d'une somme de départ de 200 €. Combien peut-on espérer gagner ?

Exercice 35 *Paradoxe de Condorcet*

Une urne U_1 contient trois boules numérotées 1, 6 et 8. Une urne U_2 contient trois boules numérotées 2, 4 et 9. Une urne U_3 contient trois boules numérotées 3, 5 et 7.

Justine joue avec l'urne U_1, Alice avec l'urne U_2 et Mathilde avec l'urne U_3. Le jeu se joue à deux, chaque joueur prend au hasard une boule dans l'urne ; le gagnant est celui qui a le plus grand numéro.

1. Calculer l'espérance de chaque joueur.
2. Justine joue contre Alice. Laquelle des deux a le plus de chance de gagner ? (dresser un tableau décrivant les couples de résultats possibles).
3. Alice joue contre Mathilde. Qui a le plus de chance de gagner ?
4. Enfin, Mathilde joue contre Justine. Qui a le plus de chance de gagner ?

Exercice 36 Une urne contient six boules, trois noires et trois rouges. On tire au hasard deux boules simultanément et on note leur couleur.

X est la variable aléatoire associant à chaque tirage le nombre de boules rouges obtenues.

1. Montrer qu'il y a 15 tirages possibles.
2. Etablir la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Exercice 37 Lors d'un examen, un élève doit répondre à un QCM. Ce QCM comporte trois questions et, pour chaque question, trois réponses différentes sont proposées, dont une seule est exacte.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. L'élève peut choisir de ne pas répondre, et dans ce cas, il ne perd ni ne gagne de point.

1. Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.

   On appelle X le total des points que l'élève a obtenu pour cet exercice. Si X est négatif, le résultat est ramené à 0.
2. Déterminer les différentes valeurs prises par X et calculer l'espérance de X.
3. Ce sujet a été donné à 650 élèves qui ne connaissaient absolument pas le sujet, et qui ont donc tous répondu au hasard. A quelle moyenne des points peut-on s'attendre approximativement ?

Exercice 38

1. a) **Démonstration de cours.** Démontrer la relation du triangle de Pascal sur les coefficients binomiaux : pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

   b) En déduire que pour tous entiers naturels n et k tel que $2 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

2. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

   On tire au hasard et simultanément k boules dans l'urne, et on appelle A l'évènement "tirer au moins une boule rouge".

   a) Exprimer en fonction de n et k la probabilité de l'événement $\overline{A}$ contraire de l'événement A, puis en déduire la probabilité de A.

   b) Déterminer d'une autre manière la probabilité de l'événement A.
   Retrouver alors le résultat précédent à l'aide de la formule de la question 1.

VI - Lois de probabilités

1) Lois de probabilités discrètes

Définition Loi de Bernoulli
Une épreuve de Bernoulli est une expérience alétoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée sucès et de probabilité p, l'autre appelée échec et de probabilité $1-p$.
La loi de probabilité est alors appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

issue	*succès*	*échec*
probabilité	p	$1-p$

Exemple : On lance un dé cubique équilibré. On appelle succès l'événement : S "un six est obtenu". Sa probabilité est $p = \dfrac{1}{6}$.
On obtient la loi de Bernouilli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

issue	succès	échec
probabilité	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{5}{6}$

Définition Schéma de Bernouilli
Un schéma de Bernouilli est la répétition de d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

Exercice 39 On lance un dé cubique équilibré 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement S : "obtenir un six" est réalisé.
1. Dresser un arbre pondéré et déterminer la loi de probabilité de X.
2. Mêmes questions si on lance cette fois 4 fois de suite le dé.
2. Mêmes questions si on lance cette fois 5 fois de suite le dé.

Propriété Loi binomiale
On considère un schéma de Bernouilli constitué de n épreuves indépendantes, et on note X la variable aléatoire qui, à chaque liste de n résultats associe le nombre de succès.
Alors, pour tout entier k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale de paramètres** n **et** p*, et est notée $\mathcal{B}(n;p)$.*

Démonstration: Chaque liste formée de n succès, et donc de $n-k$ échecs, a pour probabilité : $p^k(1-p)^{n-k}$.
Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ telles listes, le nombre de façons différentes de choisir la position des k succès. □

Remarque : La probabilité d'obtenir un nombre quelconque de succès est :
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$
d'après la formule du binôme.

Propriété (admise) *Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors*
$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exercice 40 Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un QCM. Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule est exacte. X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.
- Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
- Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses.
- Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

Exercice 41 Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Donner le cas échéant les valeurs des paramètres de la loi binomiale associée.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer non truqué, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer non pipés, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.
4. Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte au total 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses.
   On cueille successivement et au hasard 3 fleurs, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.

Exercice 42 *(19 p33)*

Des études statistiques montrent que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 0,51. On chosiit au hasard une famille de quatre enfants où les fécondations sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons.

1. Justifier que cette situation peut-être modélisée par une loi de binomiale.
2. Calculer la probabilité que cette famille compte au moins un garçon.

Exercice 43 *(D'après Bac 2000)* Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E_1 : "Les boules sont toutes de couleurs différentes" ;
   E_2 : "Les boules sont toutes de la même couleurs".
   b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.
   Etablir la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. On effectue ainsi k tirages successifs.
   Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des rouges ?

2) Lois de probabilités continues

On a définit jusqu'à présent des lois de probabilité sur des ensembles dénombrables d'issues d'expériences aléatoires. On peut aussi définir des lois de probabilité sur des ensembles continus, c'est-à-dire des intervalles.

Exercice 44 On choisit au hasard un nomre réel entre 0 et 1.
Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 0,52 ?
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre compris entre 0,34 et 0,35 ?

Définition *Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $I = [a; b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$.*
On définit alors la **loi de probabilité sur I de densité** *f de la façon suivante :*
pour tout intervalle $(c; d)$ ((c, d) intervalle de bornes $c \leqslant d$) contenu dans I,

$$P((c, d)) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Remarque : *Si la varaible aléatoire X suit une loi de probabilité continue de densité f définie sur $[a; b]$,*

- $P(X=c)=\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx=0.$
- $P(X\leqslant c)=\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ *et,* $\quad P(X\geqslant c)=\displaystyle\int_c^b f(x)dx$
- *Si la densité f est définie sur $[0;+\infty[$,*
  $P(X\leqslant c)=\displaystyle\int_0^c f(x)dx,$ *et* $\quad P(X\geqslant c)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)dx=1-\int_0^c f(x)dx.$

Définition (Loi uniforme) *La loi uniforme sur $[0;1]$ est la loi de probabilité de densité f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$.*
On a donc, pour tout intervalle $(c;d)$ de $[0;1]$, $P((c;d))=\displaystyle\int_c^d 1\,dx=d-c.$

Définition (Loi exponentielle) *La loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ sur $[0;+\infty[$ est la loi de probabilité de densité f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.*
On a donc, pour tout intervalle $(c;d)$ de $[0;+\infty[$:

$$P((c;d))=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$$

Exercice 45 La loi de durée de vie X (en heures) d'un composant électronique a été modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,000\,6$ sur $[0;+\infty[$.

a) Quelle est la la probabilité qu'un de ces composants, pris au hasard, ait une durée de vie inférieure à 1000 heures ?

b) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants, pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?

Exercice 46 *(27 p434)* P est une loi de probabilité sur $[0;10]$ de densité f définie par $f(x)=\lambda x^{-2}$.
Déterminer λ.

Exercice 47 *(29 p434)* a et b sont deux réels tesl que $a<b$.
Déterminer la fonction densité de la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

Exercice 48 *(35 p234)* P désigne la loi uniforme sur $[0;1]$.

a) Calculer $P([0,24;0,47])$.

b) Calculer $P_{[0,2;0,6]}([0,5;0,55])$.

c) On choisit un nombre au hasard dans $[0;1]$.
Sachant que ce nombre est compris entre 0,6 et 0,7, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 0,68 ?