Transformations du plan complexe

Exercice 1

a) Déterminer l'équation complexe et cartésienne du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3+2i)$.

b) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

c) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x-2y+11=0$.

I - Transformations du plan complexe

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On lui associe la transformation du plan complexe F de la façon suivante : à $M(z)$ du plan complexe, on associe le point $M'(z')$ tel que $M'=F(M)$ selon, $z'=f(z)$.

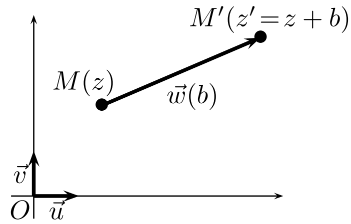
$z'=f(z)$ est l'écriture complexe de la transformation F.

Exercice 2 La transformation F a pour écriture complexe $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

1. Pour $z\in\mathbb{C}$, déterminer, en fonction de z, $|z'|$ et $\arg(z')$.
2. Soit A et B les point d'affixe $z_A=2$ et $z_B=1-i$.
   (a) Déterminer les affixes des points A' et B' images de A et B par la transformation F.
   (b) Placer dans le plan complexe les points A, A', B et B'.

II - Transformations particulières du plan complexe

Propriété *(Translation) Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe b.*
La transformation $z\mapsto z'=z+b$ correspond dans le plan complexe à une translation de vecteur $\vec{w}$.



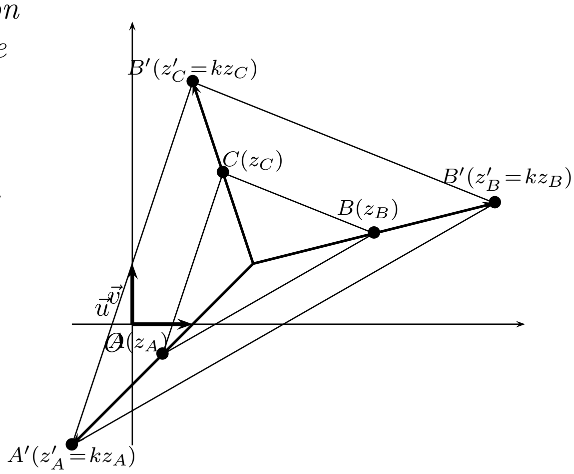
Démonstration: $z'=z+b \iff z'-z=b \iff \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{w}$ □

Exercice 3 *(71 p314)* Les points A et B ont pour affixes respectifs $5-3i$ et $3-5i$.
Quelle est l'écriture complexe de la translation qui transforme A en B ?

Propriété *(Homothétie)*
Soit Ω un point d'affixe ω et k un nombre réel non nul, alors la transformation d'écriture complexe

$$z'-\omega=k(z-\omega)$$

est une homothétie de centre Ω et de rapport k.



Démonstration: $z'-\omega=k(z-\omega) \iff \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.

$|z'-\omega|=|k(z-\omega)|=|k|\,|z-\omega|$, et,
$\arg(z'-\omega)=\arg(k(z-\omega))=\arg(k)+\arg(z-\omega)$

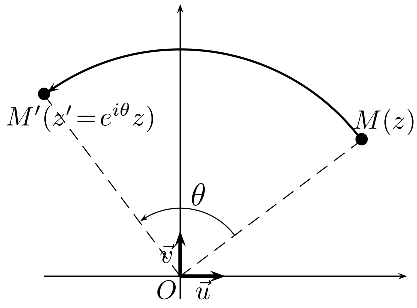
- si $k>0$, $\Omega M'=k\Omega M$, et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)$
- si $k<0$, $\Omega M'=-k\Omega M$, et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)=\pi\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)$

En résumé, pout tout réel k non nul, $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$. □

Propriété *(Rotation)*
Soit Ω un point d'affixe Ω et $k = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1 et d'argument θ, alors la transformation d'écriture complexe

$$z' - \omega = k(z - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$$

est une rotation de centre Ω et d'angle θ.



<u>Démonstration:</u> $z' - \omega = k(z - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega) \iff \begin{cases} |z' - \omega| = |e^{i\theta}|\,|z - \omega| = |z - \omega| \\ \arg(z' - \omega) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(z - \omega) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$$

$\square$

Propriété *(Similitude, hors programme...)*
Plus généralement, soit Ω un point du plan d'affixe ω, et $k = re^{i\theta}$ un nombre complexe, alors la transformation d'écriture complexe

$$z' - \omega = k(z' - \omega)$$

correspond dans le plan complexe à une similitude, c'est-à-dire à la composition d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\arg(k) = \theta$, et d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $|k| = r$.

Exercice 4 La transformation T a pour écriture complexe $z' = i(z + 1) + 1$.
a) Montrer qu'il existe un seul point M tel que $T(M) = M$.
On note Ω ce point et ω son affixe. *(M est appelé un point fixe, ou point invariant, de T)*
b) Vérifier que $z' - \omega = i(z - \omega)$.
c) En déduire la nature de la transformation de T.

Exercice 5 h est l'homothétie de rapport 2 et de centre I d'affixe $1 + i$.
A est le point d'affixe $-1 - 2i$.
a) Donner l'écriture complexe de h.
b) Calculer l'affixe du point A' image de A par h.

Exercice 6 Déterminer l'écriture complexe de la transformation :
a) L'homothétie de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et de centre V d'affixe i.
b) La rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre I d'affixe $-2 + i$.
c) La symétrie centrale de centre J d'affixe -4.
d) La translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $-5 + 2i$.

Exercice 7 *(72 p314)* Identifier la transformation du plan complexe :

a) $z' = 3z$ b) $z' = \overline{z}$ c) $z' = iz$ d) $z' = -z$ e) $z' = -\overline{z}$

f) $z' = z + 4i$ g) $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}z$ h) $z' = \dfrac{1 - i}{\sqrt{2}}z$ i) $z' + 2i = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}(z + 2i)$

Exercice 8 Les points A et B ont pour affixe respective les nombres complexes a et b.

Déterminer l'affixe c du point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A avec $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 9 *(76 p314)* A et B sont les points d'affixes respectives $1+i$ et $-2+2i$.
Déterminer l'écriture complexe de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

Exercice 10 T est la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de T.
2. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M, d'affixe z tels que $|z-2i|=2$.
   a) Déterminer et construire $\mathcal{C}$
   b) Déterminer et constuire l'image de $\mathcal{C}$ par T.
3. Δ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-1|=\left|z-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|$.
   a) Déterminer et construire Δ.
   b) Déterminer et constuire l'image de Δ par T.

Exercice 11 *(*D'après Bac 2004)
Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$.
   Les solutions seront notées z et z', z' désignant le solution dont la partie imaginaire est positive.
2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle et sous forme algébrique.

Partie B
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   Tracer ce cercle puis constuire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et B' l'image de B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu de $[OB]$.
   a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?
   b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3}-i$.
   c) La conjecture émise à la question a) est-elle vraie ?

III - Exercices

Exercice 12 *(17 p310)* On pose $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.
a) Calculer j^2, j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.
b) Vérifier que $1+j+j^2=0$.
c) Calculer la somme $S'=1+j+j^2+\cdots+j^{2005}+j^{2006}$.

Exercice 13 *(73 p314)* La transformation T a pour écriture complexe : $z'=-5(z+3i)$.

a) Démontrer qu'il existe un seul point M tel que $T(M) = M$. On note Ω ce point et ω son affixe.
b) Vérifier qye $z' - w = -5(z - \omega)$.
c) Identifier la transformation T.

Exercice 14 *(89 p316)* Soit p et q deux nombres réels.
a) Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.
b) En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et de $\sin(p) + \sin(q)$.
c) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation : $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 15 *(83 p315)*

Exercice 16 *(84 p315)*

Exercice 17 *(85 p315)*