Nombres complexes

I - Introduction - Résolution d'équations algébriques

Soit le trinôme du second degré $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 5$.

Le discriminant de P est : $\Delta = 9 - 10 = -1 < 0$, donc P n'a pas de racine réelle.

Imaginons un instant que l'on puisse néanmoins écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1}$, et donc les formules donnant les racines de P (qui ne sont donc sûrement pas réelles !) :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 + \sqrt{-1}\ ;\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 - \sqrt{-1}$$

Alors,

$$\begin{aligned} P(x_1) = P(-3 + \sqrt{-1}) &= \frac{1}{2}\Big(-3 + \sqrt{-1}\Big)^2 + 3\Big(-3 + \sqrt{-1}\Big) + 5 \\ &= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + \big(\sqrt{-1}\big)^2\Big) - 9 + 3\sqrt{-1} + 5 \\ &= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + (-1)\Big) - 4 + 3\sqrt{-1} \qquad (\text{car } \sqrt{-1}^2 = -1\,!) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On calcule de même que $P(x_2) = 0$, et ainsi, ce trinôme du second degré admet bien deux racines distinctes, mais celles-ci **ne sont pas réelles**.

Le nombre $\sqrt{-1}$ n'existe pas : ce n'est pas un nombre réel. Cardan, mathématicien du XVIème siècle appelait ce type de nombre des nombres "impossible".

Plus tard, Descartes leur donna le nom de nombre "imaginaire", qui sont devenus aujourd'hui des nombres complexes.

II - Révisions

Exercice 1 Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 Soit α un angle orienté tel que $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{5}$.

1. Calculer les valeurs possibles de $\cos(\alpha)$.
2. On suppose que $\alpha \in [\pi; 2\pi]$. Déterminer alors $\sin(\alpha)$, et placer sur le cercle trigonométrique le point d'angle α.
3. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α.

Exercice 3 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
A est le point de coordonnées cartésiennes $(-2; -2\sqrt{3})$ et B le point de coordonnées polaires $\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

1. Démontrer que A et B se trouvent sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
2. Calculer les coordonnées polaires de A.
3. Calculer les coordonnées cartésiennes de B.

III - Le plan complexe

Théorème *(admis)*
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, *qui possède les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*
- *il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.*

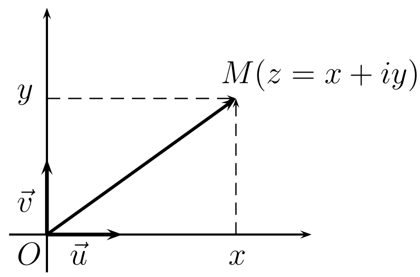
Ex : $z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, donc $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$; ...

Définition *L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la* **forme algébrique** *du nombre complexe z.*
x est la partie réelle de z, notée $\mathcal{R}e(z)$, et y est la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$,
D'après le premier théorème, on a alors :

Corollaire *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' quatre nombres réels, alors,*

$$z = z' \iff \Big(a = a' \quad \text{et} \quad b = b'\Big)$$

Définition *(Plan complexe)*
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.
A tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x; y)$.
On dit que z est l'affixe du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$; et que le point M, ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.



Définition *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc* **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. *Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc* **axe imaginaire (pur)**.

Exercice 4 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1-2i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

IV - Opérations sur les nombres complexes

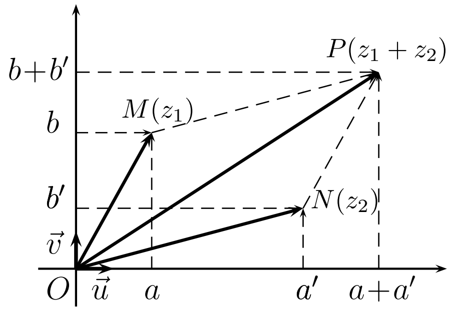
Les règles de calcul sur les nombres réels se prolongent aux nombres complexes.

Exercice 5 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :
- $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ • $(5 + i) - (3 - 2i)$ • $(1 + i)(3 - 2i)$ • $(4 + i)(-5 + 3i)$

• $(2-i)^2$ • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Propriété *Soit $z_1 = a+ib$ et $z_2 = a'+ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' quatre réels, et M et N leur image respective dans le plan complexe. Alors $z = z_1 + z_2 = (a+a') + i(b+b')$ a pour image le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.*

De même, le vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ a pour affixe le complexe $z_{\overrightarrow{MN}} = z_2 - z_1$.



Propriété *Soit deux points A et B d'affixe z_A et z_B, alors*

- *l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_b - z_A$*
- *l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A;\alpha)$ et (B,β), $\alpha+\beta \neq 0$, est*

$$z_G = \frac{\alpha z_a + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe z et z', alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.

Exercice 6

(19 p310) Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.
c) Placer les points A, B et C.

Exercice 7

(20 p310) Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.

a) Montrer que les points A, B et C sont alignés.
b) Déterminer les réels a et b tels que C soit le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$, avec $a+b=1$.

Propriété *(Inverse d'un nombre complexe)*

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, noté $\dfrac{1}{z}$.

<u>Démonstration :</u> Soit $z = x+iy$ un nombre complexe non nul, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Alors, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ avec $x^2+y^2 \neq 0$

Exercice 8

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

• $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$ • $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$ • $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\right) + \left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$

• i^3 • $\dfrac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6 • Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

Exercice 9

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a) Faire une figure
b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

V - Conjugué d'un nombre complexe

Définition *Soit $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe. On appelle* **conjugué** *de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

<u>Ex :</u> • $z = 3 + 2i$, alors $\overline{z} = 3 - 2i$. • $\overline{3 - \frac{1}{2}i} = 3 + \frac{1}{2}i$ $\overline{-5} = -5$ $\overline{3i} = -3i$

Propriété
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- *si* $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- *si* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ *et donc, z imaginaire pur* $\iff \mathcal{R}e(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$
- $z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$, *et donc,* $z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}m(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

Exercice 10 Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3 - i}{5 + 7i}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i}{5 - 7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 11 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Vérifier que $1 + i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

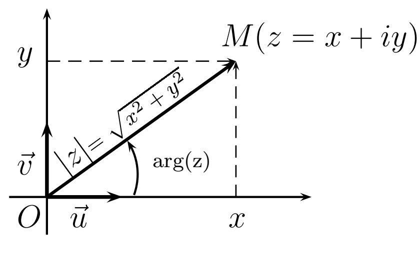
Exercice 12 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

VI - Module et argument d'un nombre complexe

Définition *Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.*

Alors, $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = z\overline{z}$. Ce nombre, **réel et positif**, *s'appelle* **le module** *du nombre complexe z, et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

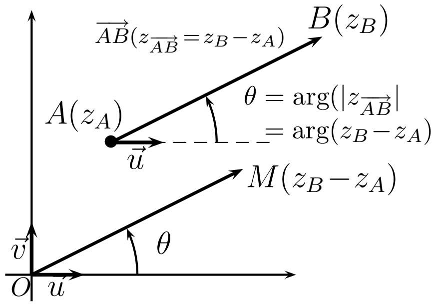
On appelle **argument** *du nombre complexe non nul z, noté arg(z), toute mesure en radians de l'angle orienté : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*



<u>Remarque :</u> Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguement : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

Corollaire *Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,*
- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$
- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.

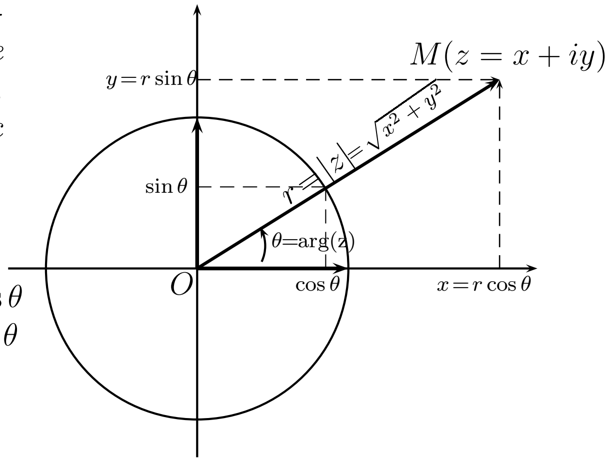


Exercice 13 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z - 3| = |z + 2i|$ • $|z + 1 - 2i| < \sqrt{5}$ • $\left|\overline{z} + \dfrac{i}{2}\right| = 4$
- $\arg(z + i) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

VII - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition *Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x; y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.*



On a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}\ ,\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$

L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** *de z.*

Exercice 14 Placer dans le plan complexe et écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

- $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1 + i$
- $z_1 = -\sqrt{3} + i$ • $z_2 = -17$ • $z_3 = -6\sqrt{3} + 6i$ • $z_4 = 5i$

Exercice 15 Déterminer le module et un argument du complexe $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$. En déduire sa forme trigonométrique, puis le placer dans le plan complexe.

Exercice 16 Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$, et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Ecrire z_1, z_2, z_3 et Z sous forme algébrique.
Déterminer les modules de z_1, z_2 et Z.

Propriété *Pour tout nombres complexes z et z' :*

- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire)*
- $|zz'[= |z||z'|z|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\dfrac{|z|}{|z'|} = \left|\dfrac{z}{z'}\right|$

Exercice 17 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|2-iz| = |z+5|$ • $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right| > 1$

VIII - Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos\theta = i(i\sin\theta + \cos\theta) = if(\theta)$$

De plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.
On en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

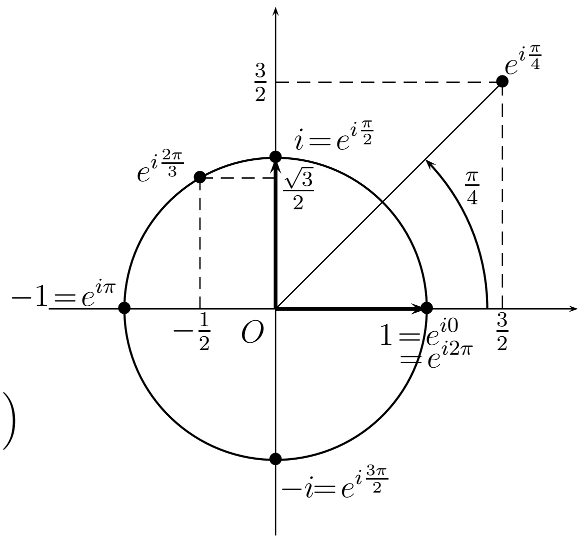
Propriété *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*
Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

où, $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$.

Ex : • $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$

- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



Exercice 18 Placer dans le plan complexe et écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ • $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ • $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 19 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

- $5i$ • $4+4i$ • $\sqrt{3}-i$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Propriété *Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n,*

- $|e^{i\theta}| = 1$, *et* $arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ *(Formule de Moivre), c'est-à-dire,* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Corollaire *Pour tous nombres complexes z et z',*

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
- $arg(z^n) = n\,arg(z)$
- $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

Démonstration : Soit $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, et $z' = r'e^{i\theta'}$, $r' = |z'|$ et $\theta' = \arg(z')$, alors, $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, et donc, $|zz'| = rr' = |z||z'|$, et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

De même pour la puissance : $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\left(e^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$, et donc, $|z^n| = r^n = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\theta = n\arg(z)$

Exercice 20 *(54 p313)* On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 21 *(55 p313)* Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.

Etait-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 22 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

Exercice 23 *(46 p312)* Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad\qquad z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3} + i}$$

Exercice 24

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 *(48 p312)*

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z = z_1z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 26 *(Formules trigonométriques)* Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 27 *(57 p313)* En utilisant la notation exponentielle complexe, retrouver en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

• $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

• $\cos(x+\pi)$ • $\sin(x+\pi)$ • $\cos(\pi-x)$ • $\sin(\pi-x)$

IX - Equations du second degré

Propriété *Soit a un nombre réel. Les solutions de l'équation $z^2=a$ sont appelées racines carrées de a dans $\mathbb{C}$, avec*

- *si $a\geq 0$, alors $z=\sqrt{a}$ ou $z=-\sqrt{a}$.*
- *si $a<0$, alors $z=i\sqrt{-a}$ ou $z=-i\sqrt{-a}$.*

Démonstration : • Si $a\geq 0$, alors $z^2=a \iff (z-\sqrt{a})(z+\sqrt{a})=0$, d'où les racines de l'équation.

• Si $a<0$, $z^2=a \iff z^2-i^2(-a)=z^2-i^2(\sqrt{-a})^2=0 \iff (z-i\sqrt{-a})(z+i\sqrt{-a})=0$, d'où les racines complexes.

Ex : Les racines carrées de 2 dans $\mathbb{C}$ sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-2}$, qui sont réelles ; les racines carrées de -4 dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{4}=2i$ et $-i\sqrt{4}=-2i$.

Propriété *L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, b et c sont trois réels, de discriminant $\Delta=b^2-4ac$ admet :*

- *si $\Delta=0$, une solution réelle double $z=-\dfrac{b}{2a}$*
- *si $\Delta>0$, deux solutions réelles distinctes $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *si $\Delta<0$, deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et , } z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise selon (avec éventuellement $z_1=z_2$) : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Exercice 28 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

• $z^2+z+1=0$ • $z^2-3z+18=0$ • $z^2+9z-4=0$ • $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

Exercice 29 Soit le polynôme : $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

a) Montrer que $z_0=1+i$ est une racine de P.
b) En déduire une factorisation de P.
c) Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 30 On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.
b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 31 *(66 p313)* Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 32 *(68 p314)* Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 33 *(67 p313)*

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2 - e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + \dfrac{1}{4} = 0$.

Exercice 35 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

Exercice 36 *(68 p314)* Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 37 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il exsite un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynçome P.

Exercice 38 *(69 p314)* Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1+6i)z^2 + 2(8+i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P.

c) Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 39 *(88 p316)*

a) x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) e^{ix}$.

b) Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$, $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 40 *(90 p316)*

Propriété *(Equations d'un cercle) Soit $\mathcal{C}_0$ le cercle trigonométrique et $\mathcal{C}_R$ le cercle de rayon R centré à l'origine, et $\mathcal{C}_{\mathbb{R},\Omega}$ le cercle de rayon R centré en Ω d'affixe ω, alors :*

- $M(z) \in \mathcal{C} \iff OM = 1 \iff |z| = 1 \iff z = e^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_R \iff OM = R \iff |z| = R \iff z = Re^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff \Omega M = R \iff |z-\omega| = R \iff z-\omega = Re^{i\theta} \iff z = \omega + Re^{i\theta}$

Remarque : En écrivant $z = x + iy$ et $\omega = \omega_x + i\omega_y$, on retrouve l'équation cartésienne d'un cercle

$M(x;y) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff |z-\omega| = R \iff |(x-\omega_x)+i(y-\omega_y)|^2 = R^2 \iff \underline{(x-\omega_x)^2 + (y-\omega_y)^2 = R^2}$

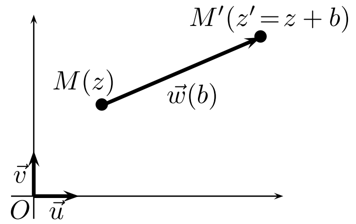
Exercice 41

a) Déterminer l'équation complexe et cartésienne du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3 + 2i)$.

b) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

c) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 11 = 0$.

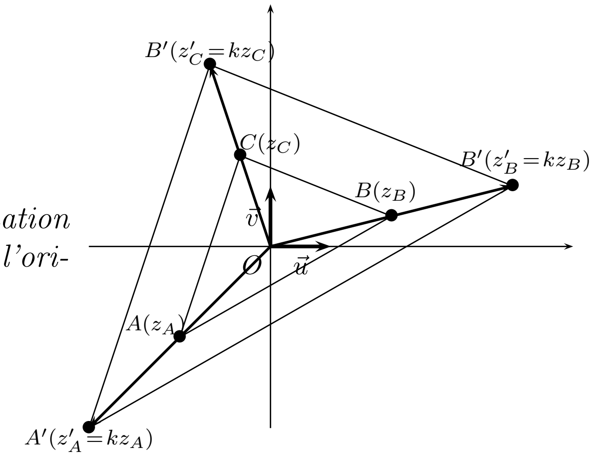
X - Transformations du plan complexe



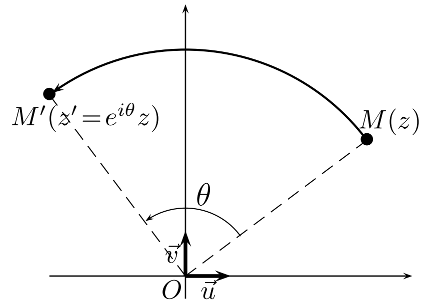
Propriété *(Translation)*
Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe b.
La transformation $z \mapsto z' = z + b$ correspond dans le plan complexe à une translation de vecteur $\vec{w}$.

Exercice 42 *(71 p314)* Les points A et B ont pour affixes respectifs $5 - 3i$ et $3 - 5i$.
Quelle est l'écriture complexe de la translation qui transforme A en B ?

Propriété *(Homothétie centrée à l'origine)*
Soit k un nombre réel, alors la transformation $z \mapsto z' = kz$ est une homothétie centrée à l'origine.



Propriété *(Rotation centrée à l'origine)*
Soit $k = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1, alors la transformation $z \mapsto z' = kz = e^{i\theta}z$ est une rotation centrée à l'origine.



<u>Démonstration :</u> Soit $z' = e^{i\theta}z$, alors,

- $|z'| = |e^{i\theta}z| = |e^{i\theta}||z| = |z|$, donc les points $M(z)$ et $M'(z')$ sont situés sur le cercle de centre O.
- $\arg(z') = \arg(e^{i\theta}z) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(z) = \theta + \arg(z)$, c'est-à-dire $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Propriété *(Similitude quelconque)*
Plus généralement, soit Ω un point du plan d'affixe ω, et k un nombre complexe, alors la transformation $z \mapsto \omega + k(z' - \omega)$ correspond dans le plan complexe à une similitude, c'est-à-dire à la composition d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\arg(k)$, et d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $|k|$.

Exercice 43 La transformation T a pour écriture complexe $z' = i(z+1) + 1$.

a) Montrer qu'il existe un seul point M tel que $T(M) = M$.
On note Ω ce point et ω son affixe. *(M est appelé un point fixe, ou point invariant, de T)*

b) Vérifier que $z' - \omega = i(z - \omega)$.

c) En déduire la nature de la transformation de T.

Exercice 44 h est l'homothétie de rapport 2 et de centre I d'affixe $1 + i$.
A est le point d'affixe $-1 - 2i$.

a) Donner l'écriture complexe de h.

b) Calculer l'affixe du point A' image de A par h.

Exercice 45 Les points A et B ont pour affixe respective les nombres complexes a et b.
Déterminer l'affixe c du point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A avec $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

XI - Exercices

Exercice 46 *(17 p310)* On pose $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer j^2, j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.
b) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
c) Calculer la somme $S' = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2005} + j^{2006}$.

Exercice 47 *(72 p314)* Identifier la transformation du plan complexe :

a) $z' = 3z$ b) $z' = \overline{z}$ c) $z' = iz$ d) $z' = -z$ e) $z' = -\overline{z}$
f) $z' = z + 4i$ g) $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}}z$ h) $z' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$ i) $z' + 2i = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z + 2i)$

Exercice 48 *(76 p314)* A et B sont les points d'affixes respectives $1 + i$ et $-2 + 2i$.
Déterminer l'écriture complexe de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

Exercice 49 *(73 p314)* La transformation T a pour écriture complexe : $z' = -5(z + 3i)$.

a) Démontrer qu'il existe un seul point M tel que $T(M) = M$. On note Ω ce point et ω son affixe.
b) Vérifier qye $z' - w = -5(z - \omega)$.
c) Identifier la transformation T.

Exercice 50 *(89 p316)* Soit p et q deux nombres réels.

a) Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.
b) En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et de $\sin(p) + \sin(q)$.
c) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 51 *(83 p315)*

Exercice 52 *(84 p315)*

Exercice 53 *(85 p315)*