Barycentre, droites et plans de l'espace $T^{\text{ale}}S$

I - Barycentre dans le plan et l'espace

Propriété *Soit A_1, A_2,…,A_n, n points et a_1, a_2, …,a_n, n réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_1+\cdots+a_n \neq 0$.*

Il existe un point unique G tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{GA_i} = a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$.

Ce point G est appelé **barycentre** *des n points pondérés $(A_1;a_1)$, $(A_2;a_2)$,…,$(A_n;a_n)$.*

Propriété **Homogénéité**

Si G est le barycentre de $(A_1;a_1)$, $(A_2;a_2)$,…,$(A_n;a_n)$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors pour tout $k \neq 0$, G est aussi le barycentre de $(A_1;ka_1)$, $(A_2;ka_2)$,…,$(A_n;ka_n)$.

Propriété **Associativité**

Le barycentre G des $n+m$ points pondérés

$$(A_1;a_1),(A_2;a_2),\dots,(A_n;a_n),(B_1;b_1),\dots,(B_m;b_m)\,,$$

avec $a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_m \neq 0$, est aussi le barycentre de

$$(A_1;a_1),(A_2;a_2),\dots,(A_n;a_n),(B;b)\,,$$

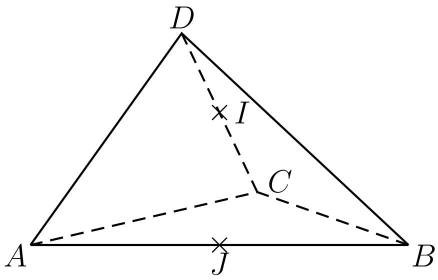
où B est le barycentre de $(B;b_1)$, …, $(B_m;b_m)$, et $b = b_1+b_2+\cdots+b_n \neq 0$.

Exercice 1

On considère un tétraèdre $ABCD$ de centre de gravité G (c'est-à-dire que G est l'isobarycentre des sommets du tétraèdre).

Soit de plus I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[AB]$.

Montrer que G est le milieu $[IJ]$.



Exercice 2

$ABCD$ est un tétraèdre. On définit les points P, Q, R et S par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \quad \text{et,}\quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\,.$$

1) Démontrer que P est le barycentre de $(B,4)$ et $(C,1)$; Q celui de $(A,1)$ et $(D,3)$; R celui de $(B,4)$ et $(A,1)$, et S celui de $(D,3)$ et $(C,1)$.
2) Démontrer que les droites (PQ) et (RS) sont sécantes.

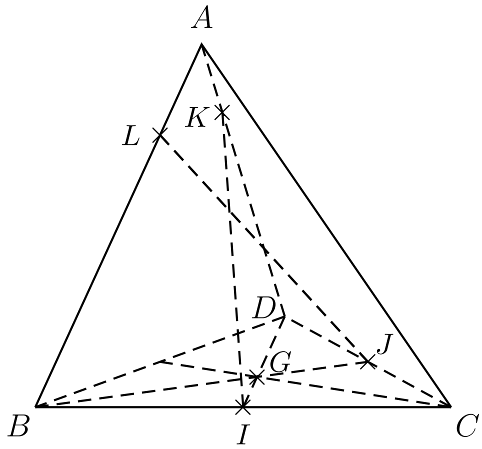
Exercice 3

On considère un tétraèdre $ABCD$. Soit G le centre de gravité du triangle BCD, et I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et de $[CD]$.

Soit K et L les points définis par : $\overrightarrow{DK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ et, $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Exprimer K comme un barycentre des points A et D, et L comme un barycentre des points A et B.

Démontrer que les droites (IK), (JL) et (AG) sont concourantes.



Propriété <u>**Réduction d'une somme vectorielle**</u>

Soit G le barycentre de $(A_1;a_1)$, $(A_2;a_2)$,…,$(A_n;a_n)$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors, pour tout point M :

$$\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\overrightarrow{MG} \iff a_1\overrightarrow{MA_1}+a_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1+a_2+\cdots+a_n)\overrightarrow{MG}$$

Propriété *Si dans un repère de l'espace, on a les coordonnées : $A_1(x_1;y_1;z_2)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, …, $A_n(x_n;y_n;z_n)$, alors le barycentre G de $(A_1;a_1)$, $(A_2;a_2)$,…,$(A_n;a_n)$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, a pour coordonnées :*

$$x_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \ ; \quad y_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i} \ ; \quad z_G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i}$$

Exercice 4 Soit dans un RON de l'espace, les points $A(2;-5;3)$, $B(-1;2;0)$ et $C(1;4;2)$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\| = 8$.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$.

Exercice 5 Soit, dans un RON de l'espace, le vecteur $\vec{u}(3;-2;5)$, et les points $A(0;1;-3)$, $B(-2;2;1)$, $C(-3;0;2)$ et $D(2;1;0)$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M tels que $\left(3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DM}\right)\cdot\vec{u} = 0$.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Propriété <u>**Caractérisations barycentriques**</u>

Caractérisation d'une droite :

- *La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.*
- *Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe.*

Caractérisation d'un plan :

- *Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.*
- *L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres des points A, B et C affectés de coefficients de même signe.*

Exercice 6 Dans un RON du plan, on considère les points $A(3;2)$, $B(-1;-6)$ et $C(15;26)$.

Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha+\beta=1$, et que C soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

En déduire que A, B et C sont alignés.

Exercice 7

Dans un RON de l'espace, $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2;0;-1)$, $B(1;-4;8)$ et $C(7;-12;22)$.

Démontrer que O est un barycentre des points A, B et C.

En déduire que les points O, A, B et C sont coplanaires.

Exercice 8 *(D'après Bac 2004)*
On considère un tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. a) G_1 est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,-1)$ et $(D,1)$.
   Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Faire une figure et placer les points I, J et G_1.

   b) G_2 est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, et $(D,2)$.
   Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2.

   c) Démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. m est un réel. On note G_m le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,m-2)$ et (D,m).
   a) Préciser l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b) Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

   c) Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   d) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.

II - Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit d la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

Alors, $M(x;y;z)\in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

$$\text{Ainsi, } M\in d \iff \left\{\begin{array}{lclcl} x &=& x_A &+& t\,a \\ y &=& y_A &+& t\,b \\ z &=& z_A &+& t\,c \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

Définition *Le système précédent s'appelle une représentation paramétrique de la droite d (t étant le paramètre de cette représentation).*

Exercice 9 Dans un RON, on donne les points $A(1;-2;3)$ et $B(0;0;1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Les points $C(-3;6;-5)$ et $D(2;-5;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 10 Les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x &=& 2t &-& 1 \\ y &=& -3t &+& 2 \\ z &=& t && \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{lclcl} x &=& 3t && \\ y &=& t &+& 2 \\ z &=& -3t &-& 2 \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 11 Démontrer que les droites d et d' définies par les représentations paramétriques sont sécantes :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x &=& 5 &+& 3t \\ y &=& 2 &+& t \\ z &=& 1 &-& 4t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et,} \quad \left\{\begin{array}{lclcl} x &=& -11 &+& 2t \\ y &=& 10 &-& 2t \\ z &=& 4 &+& t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 12 Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(2;-3;5)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-3y+z-5=0$.

Exercice 13 Soit d la droite passant par $A(2;-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2;1)$, et d' la droite passant par $A'(0;2;1)$ de vecteur directeur $\vec{u'}(2;-3;1)$.

a) Donner une représentation paramétrique de d et d'.

b) Déterminer un point M de d et M' de d' tels que (MM') soit perpendiculaire à d et à d'.

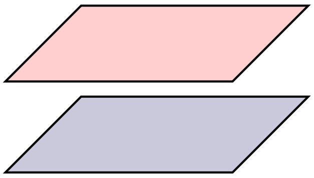
c) d et d' sont-elles parallèles ? Sont-elles coplanaires ?

III - Intersection de plans et de droites dans l'espace

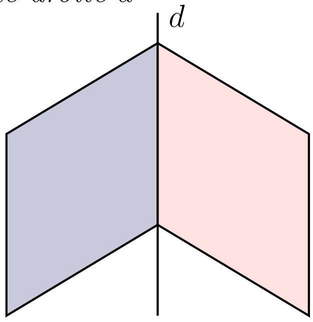
1) Intersection de deux plans

Propriété *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ deux plans de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun



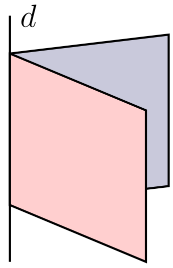
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont sécants suivant une droite d



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont confondus : leur intersection est un plan

Propriété *Algébriquement, si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ ont pour équation respective $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$, leur intersection est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$$



Si les plans sont sécants, le système est alors un <u>système d'équations cartésiennes</u> représentant la droite d.

Exercice 14

a) Le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & y & - & 4z & - & 6 & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite d ?

b) Déterminer x et y en fonction de z, puis en déduire une équation paramétrique de d.
Donner alors un point et un vecteur directeur de d.

Exercice 15 Dans un RON, les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ ont pour équations cartésiennes

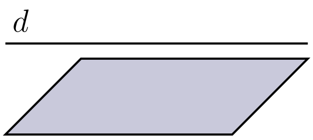
$$\mathcal{P}:\ x+y+z+3=0\,,\quad \mathcal{L}:\ 2x+2y+2z+7=0\,,\quad \text{et}\quad \mathcal{R}:\ 3x-y+2=0$$

Etudier l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, puis des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

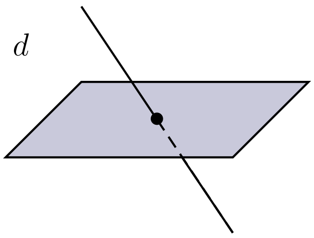
2) Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété *Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

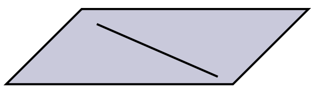
d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun



d et $\mathcal{P}$ sont sécants en un unique point A



d est contenue dans $\mathcal{P}$: leur intersection est la droite d



Exercice 16 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $5x+y-z+3=0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1-6t \\ z=3-t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 17 Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2;-1;5)$ et $(-1;2;3)$.

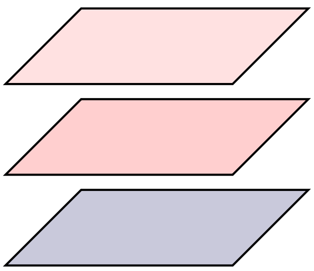
Etudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x-3y-z=1$.

IV - Intersection de trois plans

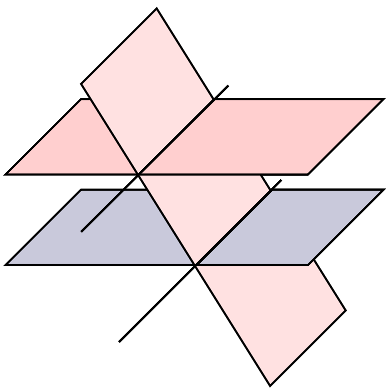
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ trois plans de l'espace. Alors, six cas sont possibles :

• **Ils n'ont aucun point commun**

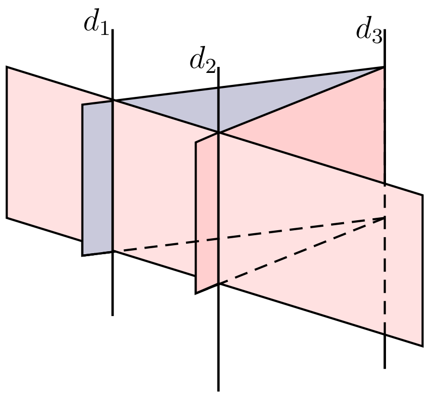
Les trois plans sont strictement parallèles



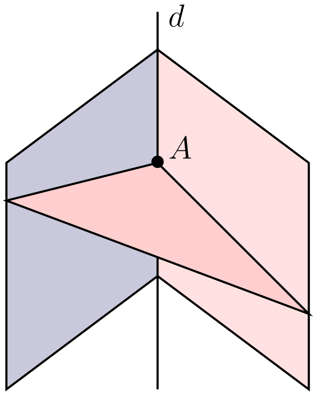
Deux plans sont strictement parallèles et sécants au troisième



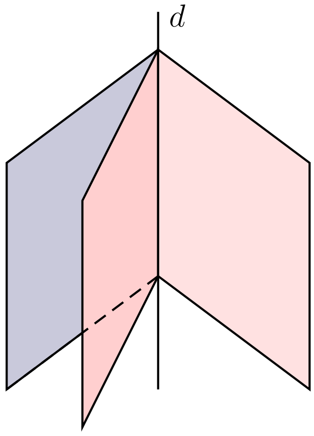
Deux plans sont sécants suivant une droite, et le troisième plan est strictement parallèle à cette droite est un plan



• **Ils ont un unique point d'intersection**



• **Leur intersection est une droite**



• **Leur intersection est un plan**

Les trois plans sont confondus

Propriété *Algébriquement, si dans un RON, les plans ont pour équations respectives $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$, et $a''x+b''y+c''z+d''=0$, alors leur intersection est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système de trois équations à trois inconnues peut donc avoir : aucune solution, une unique solution, ou une infinité.

Exercice 18

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$3x+3y+z+2=0 \quad , \quad y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 2z-8=0\,.$$

Exercice 19

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$4x+3y+z+2=0 \quad , \quad x+2y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 3x+5y+2z-9=0\,.$$

Exercice 20

Résoudre les systèmes :

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & 4z & = & -7 \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -3 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 9 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & -19 \end{array}\right.$$

Exercice 21

Montrer que le système suivant n'a aucune solution : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ -2x & + & 2y & + & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 22

(46 p380) $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un RON. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=u\vec{k}$ et $\overrightarrow{AN}=v\vec{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. a) Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2=4$.
   b) Dans le cas où la droite (MN) est tangente à $\mathcal{S}$, calculer les coordonnées du point de contact.

Exercice 23

ROC *(D'après Bac 2005)*

Partie A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace. On note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points K et L.

Partie B. Dans un RON, on considère les points $A(4;0;-3)$, $B(2;2;2)$, $C(3;-3;-1)$ et $D(0;0;-3)$.

1. Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x-4y-10z-13=0$.
   On admet par la suite que les plans médiateurs de $[BC]$ et $[CD]$ ont respectivement pour équations :
   $$2x-10y-6z-7=0 \quad \text{et,} \quad 3x-3y+2z-5=0$$
2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
3. En utilisant la partie A, démontrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère $\mathcal{S}$ de centre E.
   $\mathcal{S}$ est la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Quel est le rayon de cette sphère ?