Probabilités conditionnelles - Indépendance $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 Un essai de laboratoire porte sur 35 cobayes et 15 rats. Après 5 jours, 40 % des cobayes sont malades ainsi que 20 % des rats.

1. Compléter le tableau ci-contre par des pourcentages.
2. Quel est, arrondi au dixième, le pourcentage de rats parmi les animaux sains ?

	Cobayes	Rats	Total
Malade			
Sain			
Total			100 %

On choisit un animal au hasard. On note les événements M :"l'animal est malade", et C "l'animal est un cobaye".

3. Quelle est la probabilité que ce soit un cobaye malade ?
4. On constate que l'animal choisi est un cobaye. Quelle est la probabilité, notée $P_C(M)$, qu'il soit malade ?
5. Imaginer une relation reliant les probabilités $P(C \cap M)$, $P_C(M)$ et $P(C)$.

I - Conditionnement par un événement

Définition *Soit A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.*
La probabilité conditionnelle de de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

Corollaire *Soit A et B deux événements, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.*

Remarque : *On a aussi de même, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.*

Exercice 2 A la sortie d'une usine de fabrication, certains apparareils sont défectueux.

Ces appareils défectueux peuvent avoir deux types de panne. 30 % de ces appareils ont une panne de type A, dans 40 % des cas, ils ont une panne de type B, et dans seulement 3 % des cas, simultanément une panne de type A et de type B.

Un appareil choisi au hasard parmi les appareils défectueux présente une panne A. Quel est la probabilité qu'il présente aussi une panne de type B ?

Exercice 3 Dans une population, 60 % des familles ont une voiture, 65 % des familles ont un téléviseur, et 24 % n'ont ni voiture ni téléviseur.

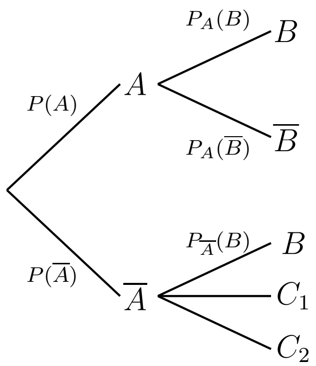
On choisit une famille au hasard. On s'aperçoit qu'elle possède un téléviseur. Calculer la probabilité qu'elle possède une voiture. *(Indication : présenter la situation dans un tableau).*

Exercice 4 La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.

De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

1. Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.
2. En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.
3. Déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la même année.

II - Arbre pondéré



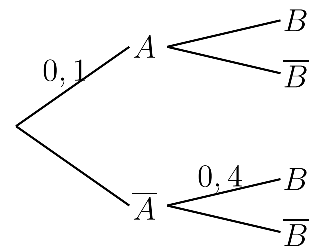
Règle 1. La somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

Règle 2. Sur chaque branche, on inscrit la probabilité conditionnelle : probabilité de l'événement de droite sachant celui de gauche.

Règle 3. Un chemin correspond à l'intersection des événements. Sa probabilité est le produit des probabilités.

Règle 4. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exercice 5 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B) = 0,39$.



1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.

Exercice 6 Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.
- 80 % ont réussi le test.
- Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
- Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.

On considère les événements R :"l'élève a réussi au test", et F :"l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité.
2. Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
3. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
4. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
5. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

III - Indépendance

Exercice 7 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note les événements C "la carte tirée est un cœur", A "la carte tirée est un as", et F "la carte tirée est une figure".
Calculer la probabilité de l'événement A ainsi que les probabilités conditionnelles $P_C(A)$ et $P_F(A)$. Interpréter les résultats.

Définition *On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.*
"Savoir que l'événement A est arrivé ne change pas la probabilité de l'événement B."

Remarque : - Si A et B sont indépendants, on a aussi $P_B(A) = P(A)$.
- Ne pas confondre indépendance et incompatibilité *(A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$)*

Propriété *Les événements A et B sont indépendans si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exercice 8 On suppose que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,000\,1$ et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.
Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port, sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?
(Indication : quelle est la probabilité que l'avion n'arrive pas à bon port ?)

Exercice 9 Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a, indépendamment des autres, une probabilité de 0,2 de tomber en panne.

Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne ?

IV - Partition de l'univers

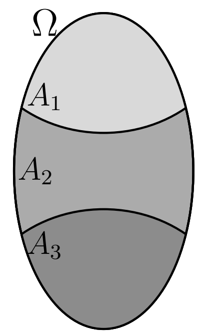
Exercice 10 Un atelier utilise 3 machines M_1, M_2 et M_3. La fabrication est répartie suivant les machines, mais, selon leur vétusté, les pièces présentent parfois des défauts :

Machine	M_1	M_2	M_3
Pièces fabriquées	50%	35%	15%
Défauts	1%	2%	6%

On tire une pièce au hasard dans le stock et on cherche la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse. On appelle D l'événement "la pièce est défectueuse" et M_i l'événement "la pièce provient de la machine M_i" ($i = 1$, 2, ou 3).

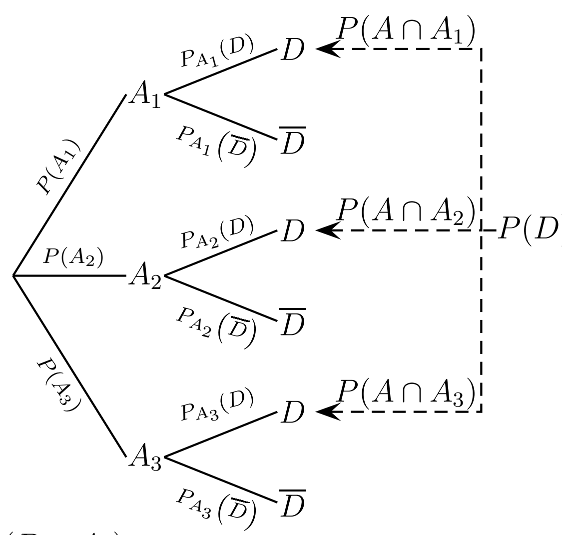
Décrire la situation par un arbre de probabilité, et calculer la probabilité de l'événement D.

Définition *Les événements A_1, A_2 et A_3 forment une* **partition** *de l'univers Ω si*
- *ils sont deux à deux disjoints (ou incompatibles) : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$;*
- *leur réunion est l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.*

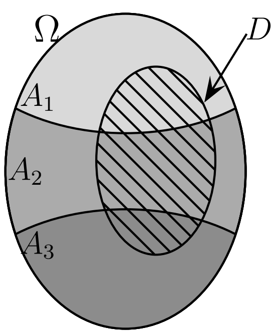


Remarque :
- Cette définition se généralise à n événement A_i, $i = 1 \dots n$, tels que : $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, et $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.
- On obtient une partition de l'univers Ω en considérant un événement A et son contraire $\overline{A}$, car alors $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

On peut alors calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers :



Propriété Probabilités totales
Si A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers Ω, alors



$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3) \\ &= P(A_1)\, P_{A_1}(D) + P(A_2)\, P_{A_2}(D) + P(A_3)\, P_{A_3}(D) \end{aligned}$$

Exercice 11 Dans une population, une personne sur quatre triche. Lorsqu'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il tire à tous les coups un as.
1. On demande à une personne au hasard de tirer une carte, quelle est la probabilité qu'un as soit tiré ?
2. Un as a été tiré. Quelle est la probabilité que j'ai eu affaire à un tricheur ?

Exercice 12 1. **ROC : Formule de Bayes.** Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

Démontrer que : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$.

2. **Application.** On dispose de 100 pièces de monnaie. Une pièce sur quatre est truquée. Une pièce truquée indique Pile avec une probabilité de $\dfrac{4}{5}$.

On choisit au hasard une pièce parmi les 100, on la lance et on obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

Exercice 13 **Test de dépistage**

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :

— sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).

— sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).

— sa valeur prédictive positive (ou valeur diagnostique) : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.

— sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).

Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;

— la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M :"l'individu est malade" et T :"le test est positif".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'événement T.
   c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.
2. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.
   a) Déterminer de même que précédemment les valeurs prédictives positive et négative que l'on notera respectivement $G(f)$ et $H(f)$.
   b) Etudier les fonctions G et H et tracer l'allure de leur courbe représentative.
   c) Quel inconvénient majeur présente, dans une population, le dépistage d'une maladie rare ?

Exercice 14 *Type Bac*

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

— la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;

— s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;

— s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

— G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » ;

— p_n la probabilité de l'événement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie.
   Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite (p_n).
6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

7. En déduire la limite de la suite (p_n).
8. Ecrire un algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n à partir duquel on a $\dfrac{3}{4} - p_n > 10^{-7}$? Déterminer aussi cet entier naturel n par le calcul.