Nombres complexes - Exercices

Exercice 1 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1-2i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

Exercice 2 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$
- $(2-i)^2$ • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 3 Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.
c) Placer les points A, B et C.

Exercice 4 Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 5 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.
a) Faire une figure
b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 6 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$ • $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$ • $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\right)+\left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$
- i^3 • $\dfrac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6 • Exprimer en fonction de $n\in\mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

Exercice 7 Soit $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 1-i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $z_1^2 - 2z_2$ • $z_1 z_2^2$ • $\dfrac{z_1}{z_2}$ • $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$ • $\dfrac{1}{z_1^2}+\dfrac{1}{z_2^2}$

Exercice 8

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S = 1+i+i^2+\cdots+i^{2014}$
3. On pose $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1+j+j^2$.

Exercice 9 Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.
Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.
Calculer z_1+z_2 et z_1-z_2.

Exercice 10 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3+z^2-4z+6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Vérifier que $1+i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
a) $5\overline{z} = 4 - i$ b) $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$ c) $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

Exercice 13 Montrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
• $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $\left|\dfrac{z + 2i}{z + 1 - 2i}\right| > 1$

Exercice 16 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
• $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1 + i$ • $z_5 = -\sqrt{3} + i$
• $z_6 = -17$ • $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Exercice 17 Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :
• $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ • $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ • $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ • $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ • $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ • $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 18 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :
• 5 • $4 + 4i$ • $\frac{3}{2}i$ • $\dfrac{2}{1 - i}$ • $\sqrt{3} - i$ • $\left(\sqrt{3} - i\right)^2$ • $\left(\sqrt{3} - i\right)^3$

Exercice 19 On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1 z_2 z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 20 Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.
Etait-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 21 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 22 Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique et exponentielle :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3} + i}$$

Exercice 23

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1-i$, et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=-1-i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z=z_1z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 *(Formules trigonométriques)* Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 26 En utilisant la notation exponentielle complexe, retrouver en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

- $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$
- $\cos(x+\pi)$ • $\sin(x+\pi)$ • $\cos(\pi-x)$ • $\sin(\pi-x)$

Exercice 27 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- $\arg(z)=\dfrac{\pi}{6}$ • $|z-3|=|z+2i|$ • $|z+1-2i|<\sqrt{5}$ • $\left|\overline{z}+\dfrac{i}{2}\right|=4$
- $\arg(z+i)=\pi$ • $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right)=\pi$ • $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 28 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2+z+1=0$ • $z^2-3z+18=0$ • $z^2+9z-4=0$ • $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

Exercice 29 On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 30 Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 31

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2+z+1=0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2-e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4+z^2+1=0$.

Exercice 32 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 33 On considère l'équation du second degré (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-1=0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.

3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et son conjugué $z_2 = \overline{z_1}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + \dfrac{1}{4} = 0$.

Exercice 35 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

Exercice 36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 37 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 38 Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2 + pz + q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 39 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1+6i)z^2 + 2(8+i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 40

1. x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 41

a) Déterminer l'équation du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3+2i)$.

b) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

c) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 11 = 0$.

Exercice 42 Soit p et q deux nombres réels.

a) Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.

b) En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et de $\sin(p) + \sin(q)$.

c) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.