Fonctions logarithmes - Exercices

Exercice 1

1. Résoudre les équations : • $e^x = 1$ • $e^x = e$ • $e^x = \dfrac{1}{e}$
2. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $e^x = 2$.

Exercice 2

a) Résoudre les équations: $(E_1): e^x = 5$ $(E_2): \ln(x) = -5$ $(E_3): \ln(2x-1) = -2$ $(E_4): \ln(1+x) = 100$

b) Résoudre le systèmes : $\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcr} -\ln x & + & 2\ln y & = & 1 \\ 3\ln x & - & 5\ln y & = & -1 \end{array}\right.$; $\mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcrcr} -2\ln x & + & 3\ln y & = & -1 \\ -7\ln x & - & 8\ln y & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par les expressions

$$f(x) = \ln(x+3) + \ln(x-2) \quad \text{et,} \quad g(x) = \ln(x^2 + x - 6)$$

Déterminer l'ensemble de définition de f et de g. Que peut-on dire de ces deux fonctions ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Déterminer l'ensemble de définition de f, et montrer que sa courbe représentative admet l'orignie du repère comme centre de symétrie.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition puis le signe de la fonction sur cet ensemble :

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e}\right)$ b) $g(x) = (\ln x - 1)\,(3 - \ln x)$ c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{1 - \ln x}$ d) $l(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 12\right)$

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations :

- $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$
- $\ln(x^2 - 3) \leq \ln(x) + \ln(2)$
- $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$
- $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 > 0$

Exercice 7

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 2\ln(x)$ b) $g : x \mapsto \ln(2x)$ c) $h : x \mapsto \ln(x^2 - 7x + 12)$

Exercice 8

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x) - x$ b) $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + 5x + 7}$ d) $k(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

Exercice 9

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 3x}{3x^3}$ c) $h(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ d) $k(x) = (2x^3 + 3x^2 - 5)e^{-x}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 9 + \ln(x)}{x+3}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11

Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln aux points d'abscisse 1 et e. Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux tangentes.

Exercice 12

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + 2}{\ln(x) - 1}$

Exercice 13 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x)$.

Exercice 14 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\Big(\ln(x)\Big)^2$.

Exercice 15 Etudier la fonction f définie par l'expression $f(x)=\ln\left(\ln(x)\right)$.

Exercice 16 Etudier la fonction définie sur $\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$ par $f(x)=-\ln\Big(\cos(x)\Big)$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $]\,0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\Big(O;\vec{i},\vec{j}\Big)$.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x-\ln(2)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha\in\Big[1;\dfrac{5}{4}\Big[$.

5. Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 18 Soit u la suite définie pour tout entier $n>0$ par $\quad u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$

I. *Calcul des premiers termes de la suite*
   a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)}$
   b) Calculer les premiers termes u_1, u_2 et u_3 de cette suite.

II. *Etude de la convergence de la suite u*
   1) a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $1-\dfrac{1}{x}\leq\ln(x)\leq x-1$
      b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p, $\dfrac{1}{p+1}\leq\ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right)\leq\dfrac{1}{p}$
   2) Soit n un entier naturel non nul.
      a) Ecrire l'encadrement précédent pour les valeurs n, $n+1$, …, $2n-1$ de p.
      b) En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que

$$u_n\leq\ln(2)\leq u_n+\frac{1}{2n}$$

   3) Prouver alors que la suite u converge vers $\ln(2)$.

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $]\,0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\ln(x)$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]\,0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln(x)$.
   b) Vérifier que $g(1)=0$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de $]\,0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire les variations de f.
   c) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 20 Soit le nombre $a = 2^{13\,345}$. Vérifier que $4\,017 \leqslant \log(a) < 4\,018$.
Indiquer alors le nombre de chiffre de la partie entière de l'écriture décimale de a.

Exercice 21 *(Echelle de Richter)*
La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de Richter, est évaluée à partir de l'amplitude A des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule $M = \log(A) - \log(A_0)$, où A_0 désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu $A = 3,98\,10^7\,A_0$.
   Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de Richter.
2. La magnitude d'un séisme est 5.
   Déterminer le rapport $\dfrac{A}{A_0}$ de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de Richter.

Exercice 22 *(pH d'une solution)*
La molarité en ions H^+ d'une solution est le nombre, noté $[H^+]$ de moles par litre d'ions H^+.
$[H^+]$ s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 (10^{-5} mol.L^{-1} par exemple). On lui préfère donc le pH défini par pH$= -\log([H^+])$.

1. Quel est le pH d'un solution contenant 3.10^{-7} moles d'ions H^+ par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions H^+ d'une solution neutre (pH$=7$) ?

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et un réel $a \geqslant 0$.
Montrer que l'équation $x^n = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $x^3 = 2$.

Exercice 24 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes : a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{X}}$ b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$