Comportement asymptotique des fonctions

<u>**1$^{\text{er}}$ exemple.**</u> Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

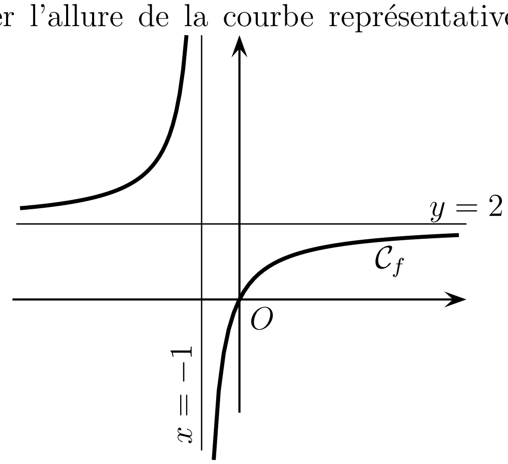
Que se passe-t-il lorsque x se rapproche de -1 ? Comment se comporte $f(x)$?
Et lorsque x devient de plus en plus grand, c'est-à-dire se rappproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

<u>**En $+\infty$ et $-\infty$:**</u> Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, positivement ou négativement, x et $x+1$ sont "très proches", et ainsi, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ devient proche de $\dfrac{2x}{x}=2$.

On écrit alors, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

<u>**En -1 :**</u> lorsque x se rapproche de -1, $2x$ se rapproche de -2, et $x+1$ se rapproche de 0.
Si x se rapproche de -1, avec $x>-1$, alors $x+1>0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $\dfrac{-2}{x+1}$ donc de $-\infty$.
Si x se rapproche de -1, avec $x<-1$, alors $x+1<0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $+\infty$.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=+\infty$.
On peut alors compléter le tableau de variations, et tracer l'allure de la courbe représentative :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	2

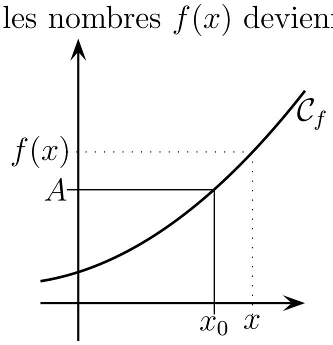


I - Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$, $a\in\mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit lorsque x tend vers $+\infty$, quatre cas peuvent se présenter :

a) les nombres $f(x)$ deviennent eux aussi "infiniment grands" :

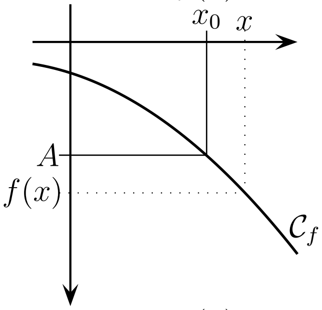


Tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Autrement dit, pour tout réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x>x_0$ alors $f(x)>A$:
les nombres $f(x)$ peuvent plus grands que n'importe quel nombre A, dès qu'on choisit x assez grand.

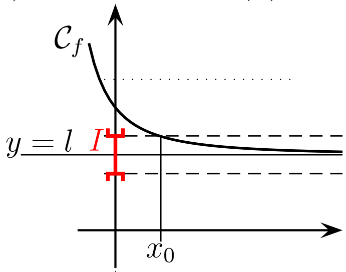
<u>**Exemple :**</u> Soit $f(x)=x^2$ la fonction carré.
Pour tout $A>0$, dès que $x>x_0=\sqrt{A}$, $f(x)=x^2>A$, donc, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement

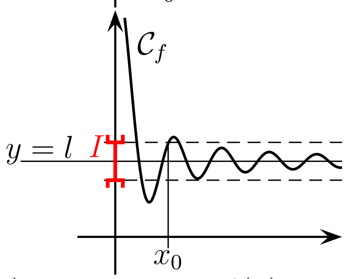


Pour tout nombre $A < 0$, aussi grand soit-il (négativement), on peut avoir $f(x) < M$, dès que on choisit x assez grand.
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

c) Les nombres $f(x)$ s'accumulent autour d'une valeur l :



Tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, pour tout intervalle I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour si $x > x_0$ alors $f(x) \in I$.
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

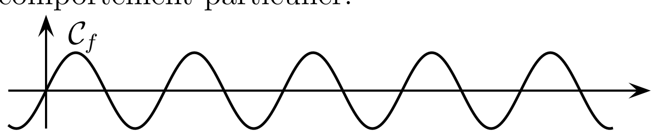


On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On peut aussi écrire, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - l) = 0$: lorsque x tend vers $+\infty$, la distance entre $\mathcal{C}_f$ et l'asymptote $y = l$ tend vers 0.

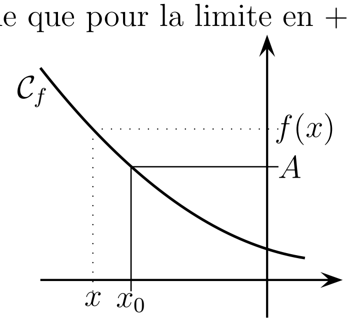
d) Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.

Par exemple, $f(x) = \sin x$

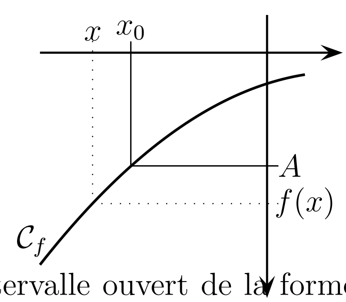


2) Limite en $-\infty$

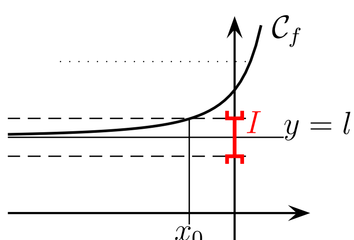
De même que pour la limite en $+\infty$, quatre cas sont possibles :



Tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisament grand négativement. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

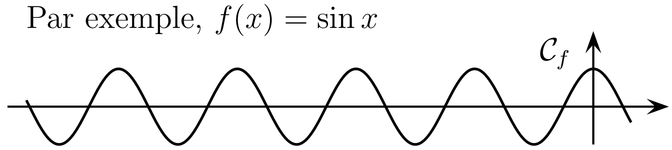


Tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x suffisament grand négativement. On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



Tout intervalle ouvert contenant l contient $f(x)$ pour x suffisament grand négativement.
On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.
Par exemple, $f(x) = \sin x$



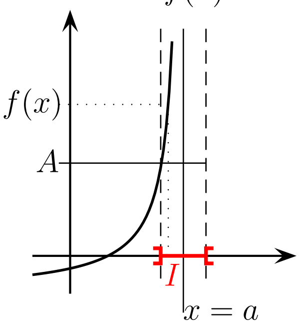
3) Limites en l'infini des fonctions de référence

$f(x)$	$\sqrt{x}$	x^2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\cos x$ $\sin x$
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	0	×
Limite en $-\infty$	×	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	×	0	0	×

II - Limite en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, trois cas peuvent se présenter :

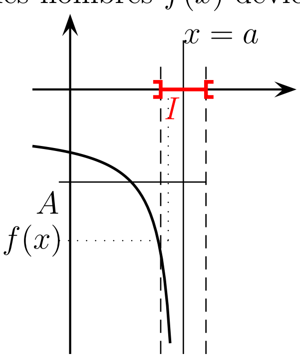
a) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand :



Tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

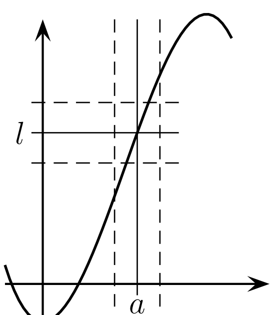
b) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement :



Tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

c) les nombres $f(x)$ se rapprochent du (s'accumulent autour du) nombre l



$f(x)$ se rapproche aussi proche de l que voulu pourvu que x soit suffisament proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Si f est définie en a et que $f(a) = l$, on donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, et la fonction est **<u>continue en a</u>**.

Définition 1 *Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est <u>continue</u> en a.*
Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Propriété 1 ***Continuité des fonctions usuelles***
Les fonctions usuelles : les fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, la fonction racine carrée, la fonction inverse, les fonctions polynômes et les fonctions rationelles, les fonctions cosinus et sinus, sont continues sur leur ensemble de définition.

<u>Remarque :</u> Une fonction rationnelle est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes.

Par exemple, la fonction $f(x)=\dfrac{8x^5-3x^3+2x^2-27x+127}{x^2-7x+12}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$, donc aussi continues en tout réel $a\neq 3$ et $a\neq 4$:

pour tout réel $a\in\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Par exemple, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\dfrac{107}{6}$.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\leqslant 3\\ 2 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 3 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si} \quad x\leqslant -1\\ -2x-1 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 1 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

III - Opérations sur les limites

Les résultats concernant les opérations sur les limites des suites sont applicables aux limites de fonctions.

1) Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

2) Limite d'un produit

Limite de f	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$

3) Limite d'un quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de g	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$	$\times$

4) Formes indeterminées

Les formes indéterminées nécessitent une étude particulière. Elles sont au nombre de quatre :

$$\text{“}+\infty-\infty\text{“} \qquad \text{“}0\times\infty\text{“} \qquad \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{“}$$

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x^2-6$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

Exercice 4 *Vrai ou faux* (Donner un contre exemple lorsque la proposition est fausse)

a. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

b. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$

c. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

a. Montrer que si $x \neq 2$ et $1,9 < x < 2,1$, alors $f(x) > 100$.

b. Soit A un réel strictement positif. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que si $x \in I$ alors $f(x) > A$.

c. Que peut-on déduire en termes de limite pour la fonction f ?

Exercice 6 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ b) $\lim_{x\to3} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -6$ d) $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ f) $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ g) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 7 Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées :

a) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x) = (4 - x^2)(3x - 2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

5) Composition de fonctions

Définition 2 *Soit f et g deux fonctions.*
On appelle fonction composée de g par f la fonction $x \mapsto f(g(x))$.

Propriété 2 *a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.*
Si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim_{x\to b} f(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$.

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 2}$.
$\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^2 + 2\right) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5 - \dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \dfrac{16}{x^2+4}}$

Rappel : La dérivée de la fonction composée $h(x) = f(g(x))$ est $h'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

Par exemple, soit $h(x) = \sqrt{x^2+3}$. Alors h est la composée de $g : x \mapsto x^2 + 3$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire que $h(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x))$.

On a $g'(x) = 2x$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc, $h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x + 1}$ b) $f(x) = (2x+3)^5$ c) $f(x) = \cos(2x - 3)$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}}$ e) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^7$ f) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^6}$

IV - Formes indéterminées

Exercice 10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

<u>Méthode en cas de forme indéterminée :</u> On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)

<u>Exemple 1 :</u> limite en $+\infty$ d'un polynôme. Par exemple, la limite en $+\infty$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

En $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$, et on ne peut donc pas directement appliquer la règle de calcul sur la limite de la somme (forme indéterminée " $+\infty - \infty$"). Néanmoins, en $+\infty$, x^3 croît plus rapidement que $2x^2$: x^3 est prépondérant devant $2x^2$.

On factorise alors par ce terme prépondérant : $f(x) = x^3\left(1 - \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right) = x^3\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$,

$$\text{et on a : } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit des limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

<u>Exemple 2 :</u> Limite en $+\infty$ d'une fraction rationnelle. Par exemple, $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3 + 4}$.

Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes. On peut donc appliquer au numérateur et au dénominateur la démarche précédente :

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{2x^3\left(1 + \frac{}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{}{x^3}}$$

$$\text{et on a : } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit et quotient des limites, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Exercice 11 Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + x + 3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$.

a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x) = x\left(2 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13 Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer a et b tels que $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.
2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
3. Dresser le tableau de variation de f, et tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

V - Théorème de comparaison

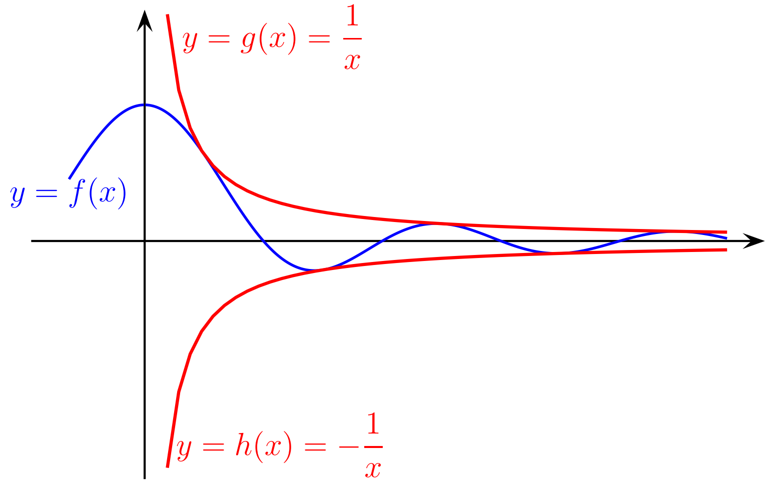
Théorème 1 Théorème des gendarmes pour les fonctions
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que, pour tout x de I, $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$.
Si de plus $a\in I$ (éventuellement $a=+\infty$) et $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$, alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

<u>Exemple</u> : Soit une fonction f telle que, pour tout $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{x}$.

Alors,

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.



Corollaire 1 *Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x de I, $f(x)\geqslant g(x)$, et $a\in I$,*

- *si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$,*
- *si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$,*

Exercice 14 *Vrai ou faux*

a. Si pour tout réel x, $f(x)\geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Exercice 15 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin(x)$.

Exercice 16 Asymptote oblique

Soit la fonction f définie sur $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que pour tout $x\in D$, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$

b. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x)-(x+1)$.

c. Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta : y=x+1$?
Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{-x^2+x+3}{x+2}$.
Montrer que la droite d'équation $y = -x+3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exercice 18 Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

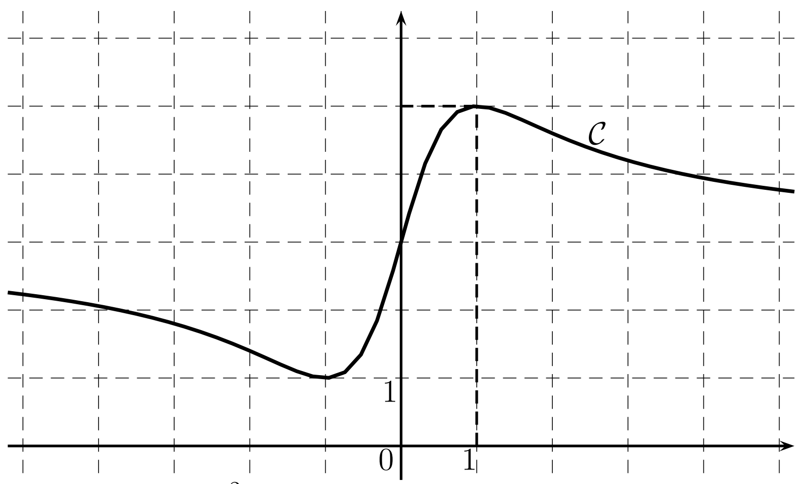
Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x-1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
3. Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 20 **Exercice type Bac**

Partie A. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-contre.
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en plus et moins l'infini.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a, b et c.



Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2+1}$.
2. Dresser le tableau de variation complet de f.
3. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
4. a. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 3$.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
   (Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x, f(-x))$ et $I(0; 3)$)

Partie C. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|) = \dfrac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de g en moins l'infini.
2. expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f.

Exercice 21 Déterminer les limites : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} + x\right)$