Limites de fonctions - Exercices $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leqslant 3\\ 2 & \text{si } x>3\end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 3 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x\leqslant -1\\ -2x-1 & \text{si } x>-1\end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 1 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+3x^2-6$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-3+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$

Exercice 4 *Vrai ou faux* (Donner un contre exemple lorsque la proposition est fausse)

a. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

b. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)g(x))=+\infty$

c. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x))=0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

a. Montrer que si $x\neq 2$ et $1,9<x<2,1$, alors $f(x)>100$.

b. Soit un réel $A>0$. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que si $x\in I$ alors $f(x)>A$.

c. Que peut-on déduire en termes de limite pour la fonction f ?

Exercice 6 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-6$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 7 Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées :

a) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x)=(4-x^2)(3x-2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x)=4x-1+\dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x)=\dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+9-\dfrac{16}{x^2+4}}$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{3}{2}x^2 - 27\pi^2$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4}$ c) $f(x) = (2x+3)(x^2-2)$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x + 1}$ e) $f(x) = (2x+3)^5$ d) $f(x) = \cos(2x-3)$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}}$ h) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^7$ i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^6}$

Exercice 10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$.

   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + x + 3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$.

a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x) = x\left(2 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13 Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer a et b tels que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
3. Dresser le tableau de variation de f, et tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

Exercice 14 *Vrai ou faux*

a. Si pour tout réel x, $f(x) \geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leqslant f(x) \leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 15 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin(x)$.

Exercice 16 Asymptote oblique

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

b. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.

c. Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x + 1$?
Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{-x^2+x+3}{x+2}$.
Montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exercice 18 Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

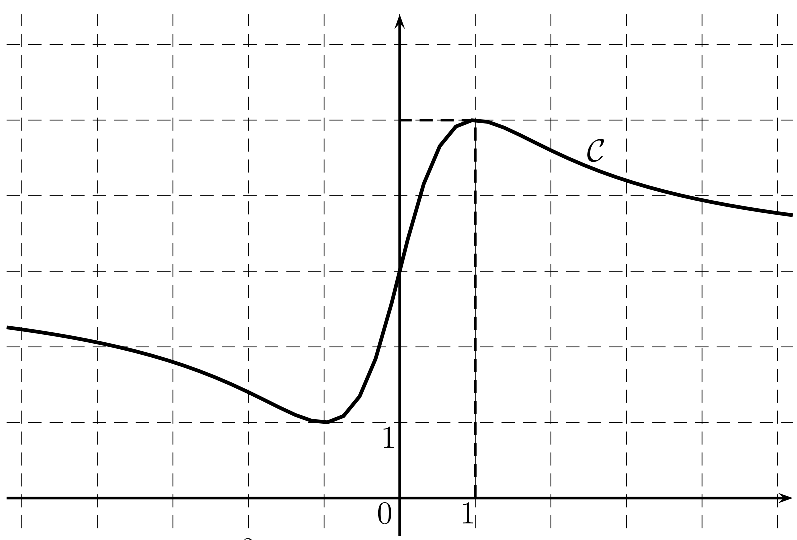
Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
3. Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 20 Exercice type Bac

Partie A. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-contre.
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en plus et moins l'infini.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a, b et c.



Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2+1}$.

2. Dresser le tableau de variation complet de f.
3. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
4. a. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=3$.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
   (Indication : Considérer les points $M(x;f(x))$, $M(-x,f(-x))$ et $I(0;3)$)

Partie C. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f\left(|x|\right)=\dfrac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de g en moins l'infini.
2. Expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f.

Exercice 21 Déterminer les limites : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)$