

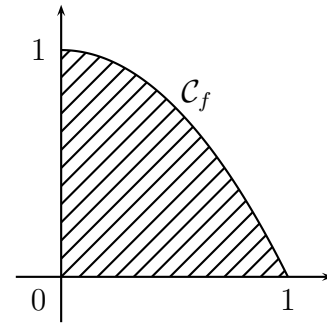
Exercice: Calcul de l'aire sous une courbe

T^{ale}S

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par l'expression $f(x) = 1 - x^2$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Le but de l'exercice est de calculer l'aire \mathcal{A} comprise entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (aire hachurée ci-contre).



A. **Question préliminaire** : Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

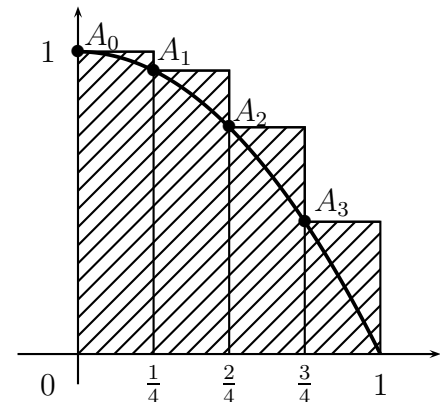
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

B. Pour calculer une valeur approchée de l'aire recherchée, on subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, et on approxime l'aire dans chacun de ces intervalles par celle d'un rectangle.

1. **Un cas particulier** : $n = 4$

Déterminer les coordonnées des points de \mathcal{C}_f , A_0 , A_1 , A_2 et A_3 , et d'abscisses respectives 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

En déduire l'aire hachurée \mathcal{A}_4 , approximation de l'aire \mathcal{A} .



2. **Cas général** : $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

a. Déterminer les coordonnées des points de \mathcal{C}_f , A_0 , A_1 , \dots , A_{n-1} , et d'abscisses respectives 0 , $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, \dots , $\frac{n-1}{n}$.

b. En déduire une expression \mathcal{A}_n de l'approximation correspondante de l'aire \mathcal{A} (aire des n rectangles).

Montrer que $\mathcal{A}_n = 1 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$.

c. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de \mathcal{A}_n .

Cette limite est l'aire \mathcal{A} recherchée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.