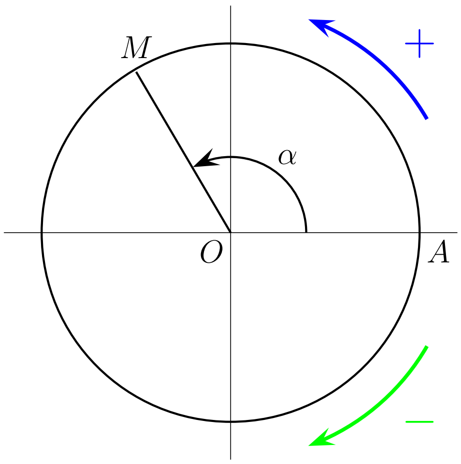
Trigonométrie et fonctions trigonométriques

I - Mesure d'un angle en radians



• Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté.

• Sur un cercle trigonométrique, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est la mesure en radian de l'angle α :

$$\widehat{AOM} = \overset{\frown}{AM} = \alpha \text{ radians}$$

$\times \dfrac{\pi}{180}$

α (deg)	0	45	60	90	135	180	270	360	-60	-120
α (rad)										

$\times \dfrac{180}{\pi}$

Sur un cercle re rayon R, si $\widehat{AOM} = \alpha$ rad, alors $\overset{\frown}{AM} = R\alpha$.

Si $\overset{\frown}{AM} = \alpha$, alors $\overset{\frown}{AM} = \alpha + 2\pi \equiv \alpha + 4\pi \equiv \cdots \equiv \alpha - 2\pi \equiv \alpha - 4\pi \equiv \ldots$.
On note $\overset{\frown}{AM} \equiv \alpha\ [2\pi]$, ou $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

- *On appelle* **mesures** *de l'angle orienté* $\widehat{AOM} = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ *tous les réels de la forme* $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *On appelle* **mesure principale** *de l'angle* $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *la mesure de l'angle dans l'intervalle* $]-\pi;\pi]$.

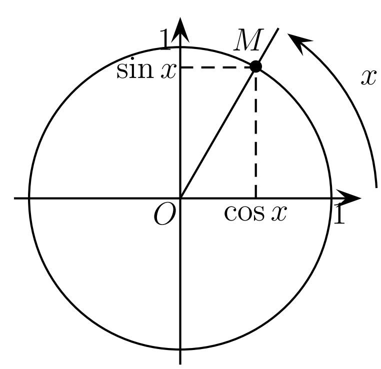
Exercice 1 Donner la mesure principale de :

• $-\dfrac{5\pi}{4}$ • $\dfrac{11\pi}{4}$ • $-\dfrac{11\pi}{4}$ • $-\dfrac{13\pi}{4}$ • $\dfrac{27\pi}{4}$ • $\dfrac{2005\pi}{4}$ • $\dfrac{37\pi}{6}$ • $\dfrac{178\pi}{8}$

II - Trigonométrie

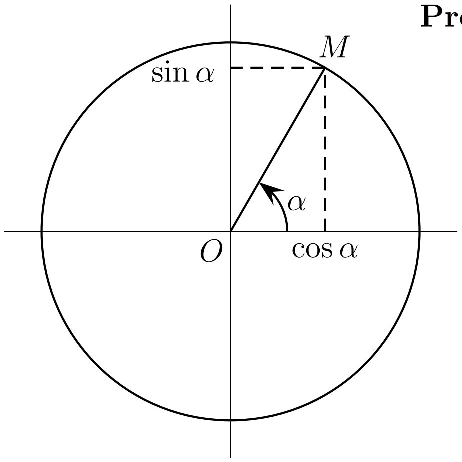
1) Cosinus et sinus d'un angle

Définition *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* M *le point du cercle trigonométrique tel que* x *soit une mesure de l'angle orienté* $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Le cosinus, noté $\cos x$, *de* x *est l'abscisse de* M ; *son sinus, noté* $\sin x$, *est son ordonnée.*



Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



Propriété *Pour tout réel α :*

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$; $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$;

Exercice 2 Donner les valeurs exactes de :

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\cos\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

Exercice 3

1. Soit $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{4}$. Déterminer $\sin x$.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Déterminer $\cos x$.

Exercice 4 On pose $m = \sin\frac{\pi}{10}$. Exprimer en fonction de m : $\sin\frac{9\pi}{10}$; $\sin\frac{11\pi}{10}$; $\cos\frac{4\pi}{10}$; $\sin\frac{6\pi}{10}$

Exercice 5 Calculer les expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

$$\begin{aligned}
A &= \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}\ .\\
B &= \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}\ .\\
C &= \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}\ .
\end{aligned}$$

2) Equations trigonométriques

Propriété *L'égalité $\cos\alpha = \cos\beta$ équivaut à $\alpha = \beta + k2\pi$ ou $\alpha = -\beta + k2\pi$.* | *L'égalité $\sin\alpha = \sin\beta$ équivaut à $\alpha = \beta + k2\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + k2\pi$.*

Exemple : $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$.
2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{6}$ et représenter ses solutions sur un cerlce trigonométrique.
3. Donner la mesure principale des solutions de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donner la mesure principale des angles x solutions.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
Donner la mesure principale des angles x solutions.

Exercice 9 Déterminer les racines de $P(X) = 2X^2 - X - 1$.
En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

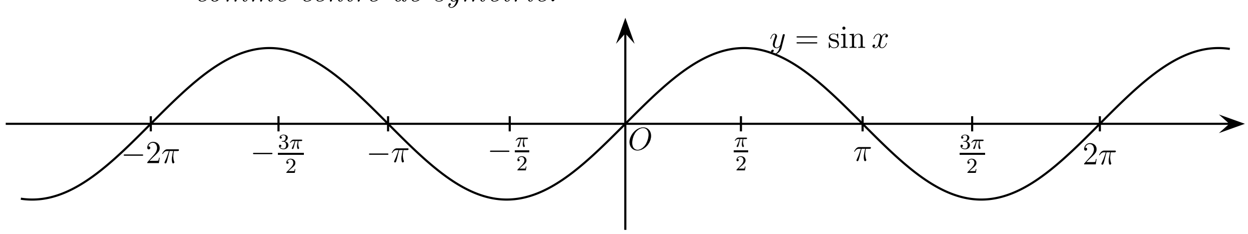
Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos^2 x - 3\cos x = 2$.

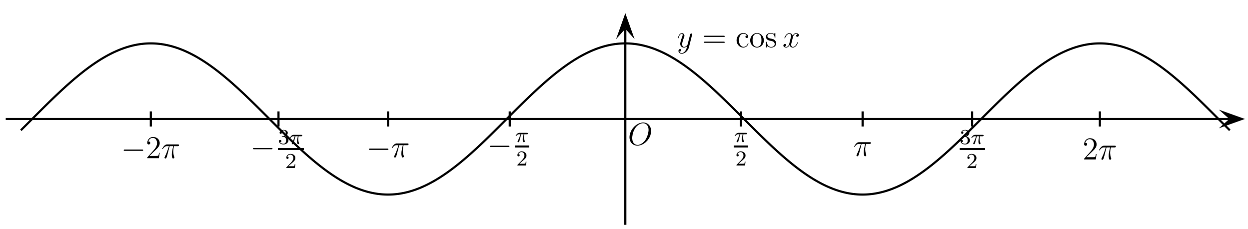
Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4\sin^2\left(2x + \dfrac{5\pi}{6}\right) + 4\sin\left(2x + \dfrac{5\pi}{6}\right) = 3$.

III - Fonctions trigonométriques

Définition *La fonction cosinus est définie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.*
La fonction sinus est définie la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

Propriété
- *Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.*
  Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont **périodiques** *de période 2π.*
  Les courbes représentatives des fonctions sinus (sinusoïde) et cosinus (cosinusoïde) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
- *Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$.*
  La fonction cosinus est **paire***, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*
- *Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin x$.*
  La fonction sinus est **impaire***, sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.*





Propriété *Les fonctions* sin *et* cos *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.

Exercice 12 Calculer la dérivée de : • $f(x) = 3\cos(x)$ • $g(x) = \cos^3(x)$

• $h(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ • $k(x) = \cos(2x+1)$ • $l(x) = \sin\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)$

Propriété $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Démonstration: Le taux d'accroissement de la fonction sin en 0 est :

$$\tau(h) = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}$$

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc aussi en 0, et en a donc,

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

De même,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(h) - \cos(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

□

Exercice 13 Étudier les fonctions définies par les expressions :
$f(x) = \cos x + x\sin x$, $g(x) = -\ln(\cos x)$, et $h(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.