# Continuité et dérivation des fonctions 

**Exercice 1** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de $f$.
3. Déterminer l'équation de la tangente $T_0$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer $T_0$ et $\mathcal{C}_f$.

## I - Continuité

**Définition** *Une fonction $f$ est dite continue en un point $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
*Une fonction est continue sur un intervalle $I$ si elle est continue en tout point de $I$.*

Graphiquement, une fonction $f$ continue sur $I$ a une courbe représentative en "un seul morceaux", c'est-à-dire qu'on peut tracer sa courbe sans lever le stylo.

Exemple : La fonction carré $x \mapsto x^2$ est continue en tout point $a$ de $\mathbb{R}$ : pour tout réel $a$, $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

**Exercice 2** On considère la fonction $x \mapsto E(x)$, appelée fonction "partie entière" et qui, à tout $x$ réel, associe le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Par exemple, $E(3,6) = 3$ et $E(-1,78) = -2$. Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $]-4; 4]$. La fonction partie entière est-elle continue ?

**Propriété**
- *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+^* = [0; +\infty[$.*
- *Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.*
- *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.*

**Convention :** On convient que, dans un tableau de variation, une flèche oblique indique que la fonction est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle considéré.

**Théorème des valeurs intermédiaires (1)**
*Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$, et soit $a \in I$ et $b \in I$.*
*Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.*
*En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c$ entre $a$ et $b$.*

Remarque : On peut avoir $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ ; dans ce cas, on doit simplement remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ dans le théorème précédent par la limite de $f$ en $\pm\infty$.

**Théorème des valeurs intermédiaires (2) - Théorème de la bijection**
*Soit $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a; b]$ ; alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c$ dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.*
*En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $c$ sur $[a; b]$.*

*Remarque :* On dit dans ce cas que $f$ réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$.

**Exercice 3** On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction $f$.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$. (on justifiera le résultat).

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | -5 | ↗ | 1 |

**Exercice 4** Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de cette solution.

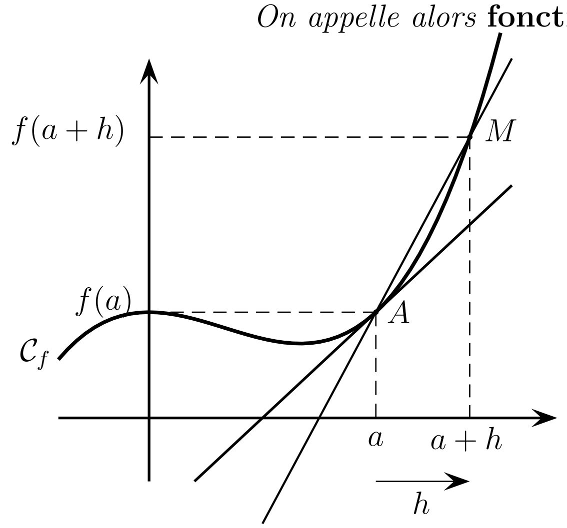
**Exercice 5** On considère la fonction $h$ définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de $h$.
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1} = 3 - 2x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[-1;+\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

# II - Dérivabilité et tangente

**Définition** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.*

- *On appelle* **taux de variation** *en $a \in I$, le nombre $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$*
- *La fonction $f$ est dérivable en $a$ si la limite lorque $h$ tend vers 0 du taux de variation existe. Dans ce cas, la limite est le* **nombre dérivée de** *$f$ en $a$, noté $f'(a)$ :*
$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$
- *Une fonction est dérivable sur un intervalle $I$ si elle est dérivable en tout réel $x$ de $I$. On appelle alors* **fonction dérivée** *de $f$ la fonction $x \mapsto f'(x)$.*




Le taux de variation est le coefficient directeur de la corde $(AM)$ :
$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
Lorsque $h$ tend vers 0, le point $M$ tend vers le point $A$, et la corde $(AM)$ "tend vers" la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A$,
$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = f'(a)$$

| le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$. |
|---|

**Autres notations** *On note souvent avec un "$\Delta$" les variations, ainsi le coefficient directeur d'une droite passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ s'écrit selon la formule : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.*

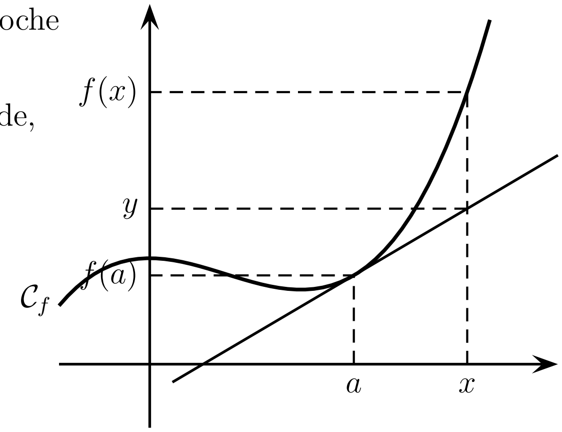
*Le taux de variation de la fonction au point d'abscisse $x$ s'écrit, selon cette notation, $\tau = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.*

*La dérivée $f'(x)$ s'obtient en étudiant la limite du taux de variation lorsque $\Delta x \to 0$, ce que l'on note encore : $f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$ qui se lit, "la dérivée de $f$ par rapport à $x$".*
*Cette notation a été en premier introduite par Leibniz (1646-1716), mathématicien, physicien, logicien, philosophe, diplomate, homme de loi, allemand (ainsi que les termes de "fonction", "coordonnées", du symbole intégral "$\displaystyle\int_a^b$", et des concepts de continuité et d'énergie cinétique (force vive), entre autres...*

**Exercice 6** Soit la fonction $f$ définie par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Montrer que $f$ est dérivable en $x = 2$ et en déduire $f'(2)$.
Déterminer directement la fonction dérivée $f'$ de $f$, et retrouver le résultat précédent.

**Exercice 7** Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que la fonction $h$ n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

**Exercice 8** Montrer que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable en 0. Que vaut $k'(0)$ ?




**Approximation affine** La tangente est "la droite la plus proche de $\mathcal{C}_f$" au voisinage de $a$.

Soit $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$ telle que, d'après ce qui précède, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$.
On a alors l'expression de $f(x)$ :

$$f(x) = \underbrace{f(a) \ + \ (x-a)f'(a)}_{\text{équation de la tangente}} \ + (x-a)\varphi(x)$$

**Propriété** *Soit une fonction dérivable en $a$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse $a$ d'équation*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

**Théorème** *Une fonction dérivable en un réel $a$ est continue en $a$.*

Démonstration: D'après ce qui précède, si $f$ est dérivable en $a$, alors, avec $\varphi$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$
$f(x) = f(a) \ + \ (x-a)f'(a) \ + \ (x-a)\varphi(x)$, et donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

Attention ! *la réciproque est fausse : une fonction peut-être continue mais non dérivable en $a$.*
*Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en $x = 0$ mais ne sont pas dérivables en $x = 0$.*

**Exercice 9** Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto x^{23} - \dfrac{12x^{11}}{5} + 3,5x^7 - \dfrac{1}{x}$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x+2}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 4x + 8}$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $f_6(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 5}$
- $f_7(x) = x^2 \cos(x)$
- $f_8(x) = \cos(2x + 3)$
- $f_9(x) = (2x^2 + 3x - 2)^7$
- $f_{10}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
- $f_{11}(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_{12}(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$
- $f_{13}(x) = \left(\dfrac{3x - 4}{x - 1}\right)^3$
- $f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 - \dfrac{1}{9x}}$
- $f_{15}(x) = \sqrt{2 + \cos^2(2x + 1)}$

# III - Etude de fonctions

**Théorème** *Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$, alors $f$ est continue sur $I$ et :*

- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, $f$ est strictement croissante sur $I$ ;*
- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, $f$ est strictement décroissante sur $I$ ;*
- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, $f$ est constante sur $I$.*

**Théorème** *Si une fonction $f$ dérivable sur $I$ admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.*

La réciproque est fausse. La dérivée d'une fonction peut s'annuler sans que cela ne corresponde à un extremum pour la fonction.

Par exemple, soit $f : x \mapsto x^3$, vérifie $f'(0) = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extremum pour la fonction cube (qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

**Exercice 10** Déterminer les extrema éventuels de $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$.

Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

**Exercice 11** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$. Montrer que $-6$ est un minorant de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 12** $f_m$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx}{x^2 - 1}$ , où $m$ est un réel.

Pour quelles valeurs de $m$, $f_m$ n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

**Exercice 13** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x) = 9 + \dfrac{12}{x-3}$.

1. a) Etudier les variations de $g$ et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$.
   c) Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. $h$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $h(x) = (x-3)\left[f(x) - g(x)\right]$.
   a) Etudier les limites de $h$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier les variations de $h$ et dresser son tableau de variations.
   c) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions.
   d) Donner un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ de chaque solution.

**Exercice 14** On note $(E)$ l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et $(I)$ l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

**1. Résolution graphique**

a) Montrer que l'équation $(E)$ est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$

b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $(E)$.
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
Encadrer chacune des autres solutions $\alpha$ et $\beta$ (avec $\alpha < \beta$) par deux entiers consécutifs.

d) Démontrer que l'inéquation $(I)$ s'écrit sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 15 > \dfrac{4}{x}$, et sur $]-\infty; 0[$, $x^2 - 15 < \dfrac{4}{x}$.

**2. Etude d'une fonction** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Justifier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Déterminer les variations de $f$ et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

e) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

f) Donner un encadrement à $10^{-2}$ près de chacune des solutions.

g) Etudier le signe de la fonction $f$. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I)$.

**3. Méthode algébrique**

a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout réel $x$, $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.

b) Résoudre alors $(E)$ et $(I)$.

**Exercice 15** $f$ est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$, puis sa dérivée seconde $f''$.
2. a) Déterminer les variations de la fonction $f'$, et dresser le tableau de variation de $f'$.
   b) Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique $c$ et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty; -1]$. Donner un encadrement de $c$ d'amplitude $10^{-2}$.
3. a) Déterminer le signe de la fonction $f'$, puis dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
   b) Montrer que $f(c) = \dfrac{3c(4-c)}{4}$
   c) Déterminer le nombre de racines du polynôme $f$.