Continuité et dérivation des fonctions

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
4. Tracer T_0 et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 On considère la fonction $x \mapsto E(x)$, appelée fonction "partie entière" et qui, à tout x réel, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $E(3,6) = 3$ et $E(-1,78) = -2$. Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $]-4;4]$. La fonction partie entière est-elle continue ?

Exercice 3 On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.
Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$. (on justifiera le résultat).

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

Exercice 4 Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 5 On considère la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de h.
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1} = 3 - 2x$ admet une unique solution α dans $[-1;+\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 6 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Montrer que f est dérivable en $x = 2$ et en déduire $f'(2)$.
Déterminer directement la fonction dérivée f' de f, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 7 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sqrt{x}$.
Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 8 Montrer que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable en 0. Que vaut $k'(0)$?

Exercice 9 Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto x^{23} - \dfrac{12x^{11}}{5} + 3,5x^7 - \dfrac{1}{x}$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x+2}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^3+3x+1}{2x^2+4x+8}$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-10}$
- $f_6(x) = \dfrac{x^2+2}{x-5}$
- $f_7(x) = x^2\cos(x)$
- $f_8(x) = \cos(2x+3)$
- $f_9(x) = (2x^2+3x-2)^7$
- $f_{10}(x) = \sqrt{4-x^2}$
- $f_{11}(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_{12}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- $f_{13}(x) = \left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^3$
- $f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 - \dfrac{1}{9x}}$
- $f_{15}(x) = \sqrt{2+\cos^2(2x+1)}$

Exercice 10 Déterminer les extrema éventuels de $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$.
Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

Exercice 11 f est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^3-2x^2-4$. Montrer que -6 est un minorant de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par : $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx}{x^2-1}$, où m est un réel.

Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

Exercice 13 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x)=9+\dfrac{12}{x-3}$.

1. a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
   c) Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=g(x)$.
2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $h(x)=(x-3)\left[f(x)-g(x)\right]$.
   a) Etudier les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
   c) En déduire que l'équation $f(x)=g(x)$ admet trois solutions.
   d) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chaque solution.

Exercice 14 On note (E) l'équation $x^3-15x-4=0$ et (I) l'inéquation $x^3-15x-4>0$.

1. Résolution graphique

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2-15=\dfrac{4}{x}$

b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto x^2-15$ et $x\mapsto\dfrac{4}{x}$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
Encadrer chacune des autres solutions α et β (avec $\alpha<\beta$) par deux entiers consécutifs.

d) Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0;+\infty[$, $x^2-15>\dfrac{4}{x}$, et sur $]-\infty;0[$, $x^2-15<\dfrac{4}{x}$.

2. Etude d'une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-15x-4$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

e) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

f) Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.

g) Etudier le signe de la fonction f. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).

3. Méthode algébrique

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x^3-15x-4=(x-4)(ax^2+bx+c)$.

b) Résoudre alors (E) et (I).

Exercice 15 f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''.
2. a) Déterminer les variations de la fonction f', et dresser le tableau de variation de f'.
   b) Prouver que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty;-1]$. Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.
3. a) Déterminer le signe de la fonction f', puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b) Montrer que $f(c)=\dfrac{3c(4-c)}{4}$
   c) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.