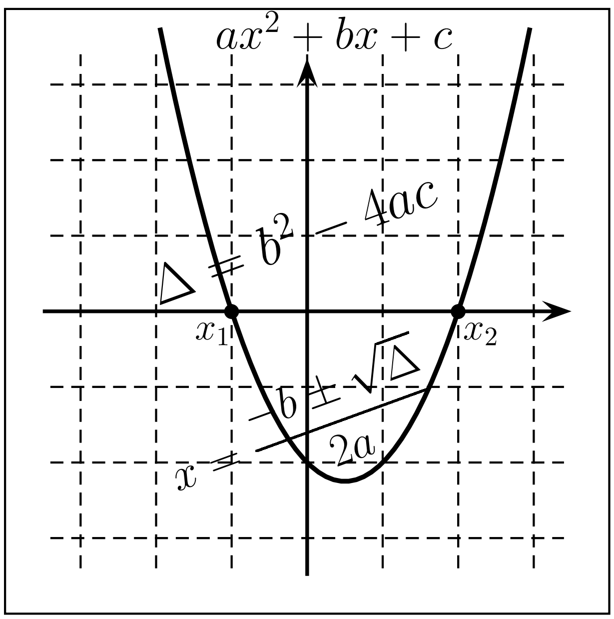
# Second degré et polynômes
# Résolution d'équation, inéquations et problèmes du second degré

Y. Morel

## Table des matières






# 1 Trinôme du second degré

## 1.1 Equations du second degré

**Définition**

*On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels quelconques, et $a \neq 0$.*

Exemple : de trinômes du second degré :

| Trinômes | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ | $a = 3$ | $b = 2$ | $c = -5$ |
| $Q(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \dfrac{2}{3}$ | $a = \sqrt{2}$ | $b = -3$ | $c = \dfrac{2}{3}$ |
| $R(x) = -x^2 + \dfrac{5}{2}x$ | $a = -1$ | $b = \dfrac{5}{2}$ | $c = 0$ |
| $S(x) = 3x^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)x - \pi$ | $a = 3$ | $b = -\left(1 - \sqrt{2}\right)$ | $c = -\pi$ |
| $T(x) = \dfrac{6}{5}x^2 - 3$ | $a = \dfrac{6}{5}$ | $b = 0$ | $c = -3$ |
| $U(x) = (x-2)^2 + 3(x+3)$ | $a = \dots$ | $b = \dots$ | $c = \dots$ |

**Définition**

*On appelle* **discriminant** *du trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$, *noté* $\Delta$, *le nombre :*

$$\Delta = b^2 - 4ac\ .$$

Exemple : de discriminant de trinômes du second degré :

| Trinômes | $a$ | $b$ | $c$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ | $a = 3$ | $b = 2$ | $c = -5$ | $\Delta = 64$ |
| $Q(x) = x^2 + 2x + 1$ | $a = 1$ | $b = 2$ | $c = 1$ | $\Delta = 0$ |
| $R(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 5$ | $a = 1$ | $b = \sqrt{2}$ | $c = -5$ | $\Delta = 22$ |

**Propriété**

- *Si* $\Delta > 0$, *l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *(avec* $a \neq 0$*) admet deux solutions distinctes (aussi appelées* **racines***) :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si* $\Delta = 0$, *l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *(avec* $a \neq 0$*) admet une unique solution (ou* **racines***) double :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si* $\Delta < 0$, *l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *n'admet aucune solution réelle.*

**Exercice 1.** Déterminer les solutions des équations :

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Solution : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, et donc l'équation admet une solution double : $x_0 = \dfrac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$.

*Remarque : On aurait aussi pu remarquer que le trinôme est une indentité remarquable :* $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, *et donc* $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.

b) $x^2 - 1 = 0$

Solution : $\Delta = 0 - 4\times1\times(-1) = 4 > 0$, et donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-0-\sqrt{4}}{2\times1} = -1 \quad \text{et,} \quad x_2 = \frac{-0+\sqrt{4}}{2\times1} = 1 \ .$$

*Remarque : On peut très bien résoudre cette équation du second degré sans calculer $\Delta$ :*

$$x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff \left(x=\sqrt{1}=1 \text{ ou, } x=-\sqrt{1}=-1\right)$$

c) $4x^2+8x-5=0$

Solution : $\Delta = 8^2 - 4\times4\times(-5) = 144 > 0$, et donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{144}}{2\times4} = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2} \quad \text{et,} \quad x_2 = \frac{-8+\sqrt{144}}{2\times4} = \frac{1}{2} \ .$$

d) $3x^2+x+6=0$

Solution : $\Delta = 1^2 - 4\times3\times6 = -71 < 0$, et donc l'équation n'admet aucune solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

## 1.2 Signe d'un trinôme du second degré

**Propriété**

*Soit $f(x) = ax^2+bx+c$, $(a\neq0)$. Alors :*

- *Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes $x_1$ et $x_2$ et*

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | *Signe de $a$* | 0 | *Signe de $-a$* | 0 | *Signe de de $a$* | |

- *Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $x_0$ et*

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | *Signe de $a$* | 0 | *Signe de $a$* | |

- *Si $\Delta < 0$, le trinôme $f(x)$ n'a pas de racine et*

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | *Signe de $a$* | |

**Exercice 2.** Etudier le signe de :

a) $P(x) = x^2-2x+1$

Solution : $\Delta = 0$ et donc le trinôme admet une unique racine (double) : $x_0 = 1$, d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | 0 | $+$ | |

*Remarque : $P(x)$ est une identité remarquable : $P(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$, et donc $P(x)$, qui est un carré, est toujours positif ou nul.*

b) $Q(x) = x^2 - 1$

Solution : $\Delta = 4 > 0$, et donc le trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

c) $S(x) = -3x^2 + 5x - 2$

Solution : $\Delta = 1 > 0$ et donc le trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

d) $T(x) = 2x^2 + x + 3$

Solution : $\Delta = -23 < 0$ et le trinôme n'admet donc aucune racine. On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | |

## 1.3 Exercices

**Exercice** 3. Résoudre les inéquations :

a) $x^2 - 2x + 1 > 0$

Solution : On cherche le signe du trinôme du second degré : $P(x) = x^2 - 2x + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 0$ et admet donc une racine double $x_0 = 1$.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

et on en déduit que $P(x) = x^2 - 2x + 1 > 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $-3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0$

Solution : On cherche le signe du trinôme du second degré : $Q(x) = -3x^2 + 5x - 2$ qui a pour discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $35$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |

et on en déduit que $Q(x) = -3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0 \iff x \in ]-\infty; -6] \cup [1; +\infty[$.

c) $x(2x - 5) \geqslant x - 6$

Solution : $x(2x - 5) \geqslant x - 6 \iff 2x^2 - 5x \geqslant x - 6 \iff 2x^2 - 6x + 6 \geqslant 0$
On cherche donc le signe du trinôme du second degré : $R(x) = 2x^2 - 6x + 6$ qui a pour discriminant $\Delta = -12 < 0$ et n'admet donc aucune racine.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $R(x)$ | | $+$ | |

toujours vérifiée, quelque soit le nombre réel $x$.

**Exercice** 4. Etudier le signe de :

a) $f(x) = -x^2 + x - 3$

Solution : La fonction $f$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -11 < 0$ et n'admet donc aucune racine réelle.
On a donc le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | |

b) $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$

Solution : $g(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.
Le trinôme du second degré du némérateur a pour discriminant $\Delta = 4 > 0$ et a pour racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$
*(ou encore* $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$ *est une identité remarquable...)*
On peut alors dresser le tableau de signes de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

c) $h(x) = 2x + \dfrac{4}{x-3}$

Solution : $h(x) = 2x + \dfrac{4}{x-3} = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x-3} = 2\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-3}$.
Le trinôme du second degré du numérateur a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ et admet donc deux racines distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
On peut alors dresser le tableau de signes de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x^2 - 3x + 2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $x - 3$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

**Exercice** 5. *(Equations bicarrées)*
En effectuant le changement de variable $X = x^2$, résoudre les équations :

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solution : On pose $x^2 = X$, et alors $x^4 = \left(x^2\right)^2 = X^2$, et l'équation devient $X^2 - 13X + 36 = 0$.
On est ainsi ramené à une équation du second degré qui a pour discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 25 > 0$, et qui admet donc deux solutions distinctes $X_1 = 4$ et $X_2 = 9$.

Il reste à revenir à l'équation initiale : $x^2 = X_1 = 4 \iff \Big(x = -2 \text{ ou } x = 2\Big)$ et $x^2 = X_2 = 9 \iff \Big(x = -3 \text{ ou } x = 3\Big)$.

L'équation admet donc quatre solutions : $\mathcal{S} = \Big\{-3; -2; 2; 3\Big\}$.

b) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 6 = 0$

Solution : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 6 = 0 \iff \dfrac{x^4 + 1 - 6x^2}{x^2} = 0 \iff \dfrac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^2} = 0$
On pose $x^2 = X$, et alors $x^4 = (x^2)^2 = X^2$,
et l'équation devient $\dfrac{X^2 - 6X + 1}{X} = 0 \iff \left(X^2 - 6X + 1 = 0 \text{ et } X \neq 0\right)$.
On est ainsi ramené à une équation du second degré qui a pour discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$, et qui admet donc deux solutions distinctes $X_1 = \dfrac{6 - \sqrt{32}}{2} = \dfrac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $X_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Il reste à revenir à l'équation initiale : $x^2 = X_1 = 3 - 2\sqrt{2} < 0$ qui est impossible et $x^2 = X_2 = 3 + 2\sqrt{2} \iff \left(x = -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \text{ ou } x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)$.

L'équation admet donc deux solutions : $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}; \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right\}$.

**Exercice 6.** Déterminer les points d'intersection (s'ils existent) de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équations : $\mathcal{P} : y = x^2 - 3x + 1$ et $\mathcal{D} : y = -2x + 1$

Solution : Les points $M(x; y)$ d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ vérifient :
- $M(x; y) \in \mathcal{P} \iff y = x^2 - 3x + 1$
- $M(x; y) \in \mathcal{D} \iff y = -2x + 1$

Ainsi, on doit avoir $y = x^2 - 3x + 1 = -2x + 1$,
d'où $x^2 - x = 0 \iff x(x - 1) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou, } x = 1\right)$

Les points d'intersection sont donc les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(1; -1)$.

**Exercice 7.** Déterminer les points d'intersection des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations : $\mathcal{P} : y = x^2 - x + 2$ et $\mathcal{P}' : y = -x^2 + 2x - 6$

Solution : Les points $M(x; y)$ d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ vérifient :
- $M(x; y) \in \mathcal{P} \iff y = x^2 - x + 2$
- $M(x; y) \in \mathcal{D} \iff y = -x^2 + 2x - 6$

Ainsi, on doit avoir $y = x^2 - x + 2 = -x^2 + 2x - 6$,
d'où $2x^2 - 3x + 8 = 0$.
Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = -55 < 0$ et n'admet donc aucune solution : les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont donc aucun point d'intersection.

**Exercice 8.** Soit $m$ un nombre réel. On considère l'équation $4x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$.
Déterminer $m$ pour que cette équation admette une unique solution.
Déterminer alors cette solution.

Solution : Cette équation du second degré a pour discriminant :
$\Delta = (m - 1)^2 - 4 \times 4 \times 1 = (m - 1)^2 - 16$.
L'équation admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$, soit $(m - 1)^2 - 16 = 0 \iff m^2 - 2m - 15 = 0$.
Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta' = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$, qui admet donc deux solutions distinctes

$$m_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -3 \quad et, \quad m_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 5 \ .$$

Ainsi, pour $m = -3$ et $m = 5$ l'équation $4x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$ admet une unique solution :

- Pour $m = -3$, $4x^2 + (m-1)x + 1 = 0 \iff 4x^2 - 4x + 1 = 0$ qui a pour unique solution : $x = \dfrac{-(-4)}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$.
- Pour $m = 5$, $4x^2 + (m-1)x + 1 = 0 \iff 4x^2 + 4x + 1 = 0$ qui a pour unique solution : $x = \dfrac{-4}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$.

# 2 Polynôme

## 2.1 Théorème fondamental

**Définition**

*Un* **polynôme** *est une expression de la forme :*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx + e$$

*avec $a$, $b$ ,$c$, $d$ et $e$ des nombres réels quelconques, et $n$ un entier naturel.*

*L'entier $n$ est le* **degré** *du polynôme.*

Exemple :

- $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 3$ est un polynôme de degré 4.
- $Q(x) = 5x^7 - 3x^2 + 4$ est un polynôme de degré 7.
- $R(x) = x^2 + x + 1$ est un polynôme (trinôme) de degré 2.

**Théorème** (Propriété fondamentale des polynômes)

*Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n$ et $a$ une racine de $P$ (c'es-à-dire que $P(a) = 0$).*

*Alors, $P(x)$ se factorise par $(x - a)$ : il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que*

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

**Exercice 9.** Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

1. Montrer que 2 est une racine de $P$, puis factoriser $P$.

   Solution : $P(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$, et donc 2 est bien une racine de $P$.
   On en déduit que $P$ se factorise suivant $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
   De plus $P$ est un polynôme de degré 3, et donc $Q$ est un polynôme de degré 2 : $Q(x)$ s'écrit sous la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

   On cherche donc $a$, $b$ et $c$ tels que

   $$\begin{aligned} P(x) = x^3 - x^2 - x - 2 &= (x - 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c \end{aligned}$$

   En identifiant les coefficients de ces polynômes, on obtient le système : $\left\{ \begin{array}{cl} a & = 1 \\ -2a + b & = -1 \\ -2b + c & = -1 \\ -2c & = -2 \end{array} \right.$

   La première équation donne directement $a = 1$, la dernière donne $c = 1$, et la deuxième $-2a + b = -1 \iff b = -1 + 2a = 1$.
   (On vérifie bien alors que la troisième équation est aussi satisfaite : $-2b + c = -2 \times 1 + 1 = -1$).

Ainsi $Q(x) = ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$, et le polynôme $P$ se factorise suivant

$$P(x) = (x-2)Q(x) = (x-2)(x^2+x+1)\ .$$

2. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

   Solution : Grâce à la factorisation précédente, l'équation $P(x) = 0$ est une équation produit :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\iff (x-2)Q(x) = (x-2)(x^2+x+1) = 0 \\ &\iff \Big(x - 2 = 0 \text{ ou } x^2+x+1 = 0\Big) \end{aligned}$$

   La première équation équation donne directement $x = 2$ (la solution du 1.), tandis que la deuxième est une équation du second degré de discriminant $\Delta = -3 < 0$ et n'admet donc aucune solution.

   Ainsi, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $x = 2$.

**Corollaire**

*Si le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines $x_1$ et $x_2$, alors il se factorise selon $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.*

**Exercice 10.** Factoriser les trinômes

1. $P(x) = x^2 - 3x + 2$

   Solution : $P(x)$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux racines distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

   Le trinôme $P$ se factorise alors suivant : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x-1)(x-2)$.

2. $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$

   Solution : $Q(x)$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 36 > 0$ et admet donc deux racines distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

   Le trinôme $Q$ se factorise alors suivant :
   $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2\Big(x - (-2)\Big)\Big(x - 1\Big) = 2(x+2)(x-1)$.

## 2.2 Exercices

**Exercice 11.** Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

1. Montrer que $-2$ est une racine de $P$, puis factoriser $P$.

   Solution : $P(-2) = 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 = -16 + 28 - 14 + 2 = 0$, et donc $-2$ est bien une racine de $P$.
   On en déduit que $P$ se factorise suivant $P(x) = \Big(x - (-2)\Big)Q(x) = (x+2)Q(x)$.
   De plus $P$ est un polynôme de degré 3, et donc $Q$ est un polynôme de degré 2 : $Q(x)$ s'écrit sous la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

   On cherche donc $a$, $b$ et $c$ tels que

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \ &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de ces polynômes, on obtient le système : $\begin{cases} 2a+b &= 7 \\ 2b+c &= 7 \\ 2c &= 2 \end{cases}$

La première équation donne directement $a = 2$, la dernière donne $c = 1$, et la deuxième $2a + b = 7 \iff b = 7 - 2a = 3$.
(On vérifie bien alors que la troisième équation est aussi satisfaite : $2b + c = 2 \times 3 + 1 = 7$).

Ainsi $Q(x) = ax^2 + bx + c = 2x^2 + 3x + 1$, et le polynôme $P$ se factorise suivant

$$P(x) = (x + 2)Q(x) = (x + 2)(2x^2 + 3x + 1) \ .$$

2. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$, puis dresser le tableau de signe de $P(x)$.

Solution : Grâce à la factorisation précédente, l'équation $P(x) = 0$ est une équation produit :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\iff (x + 2)Q(x) = (x + 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0 \\ &\iff \Big(x + 2 = 0 \text{ ou } 2x^2 + 3x + 1 = 0\Big) \end{aligned}$$

La première équation équation donne directement $x = -2$ (la solution du 1.), tandis que la deuxième est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux solutions distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, l'équation $P(x) = 0$ admet trois solutions $\mathcal{S} = \left\{-2; -1; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

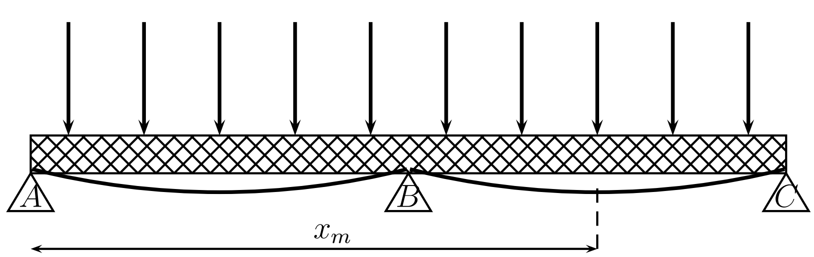
On peut alors dresser le tableau de signes de $P(x) = (x + 2)(2x^2 + 3x + 1)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $2x^2+3x+1$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

## Exercice 12. *Déformation d'une poutre*

Une poutre de longueur 2 mètres repose sur trois appuis simples $A$, $B$ et $C$, l'appui $B$ étant situé au milieu de $[AC]$.

Elle supporte une charge uniformément répartie de 1 000 N.m$^{-1}$ (newtons par mètre). Sous l'action de cette charge, la poutre se déforme.




On démontre que le point situé entre $B$ et $C$ où la déformation (la flèche) est maximum, a une abscisse $x_m$ qui est solution de l'équation :

$$32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = 0\,.$$

1. Vérifier que 1 est solution de cette équation.

   Solution : Pour $x = 1$, $32 \times 1^3 - 156 \times 1^2 + 240 \times 1 - 116 = 32 - 156 + 240 - 116 = 0$, et donc $x = 1$ est bien une solution de cette équation.

2. Factoriser alors l'équation et la résoudre.

   Solution : Le polynôme $P(x) = 32x^3 - 156x^2 + 240x - 116$ se factorise alors suivant

$$\begin{aligned} P(x) &= 32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 \\ &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c \end{aligned}$$

   En identifiant les coefficients de ces polynômes, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{cl} a & = 32 \\ -2+b & = -156 \\ -2+c & = 240 \\ -c & = -116 \end{array}\right.$
   La première équation donne directement $a = 32$, la dernière donne $c = 116$, et la deuxième $-a + b = -156 \iff b = -156 + a = -124$.
   (On vérifie bien alors que la troisième équation est aussi satisfaite : $-b + c = - \times (-124) + 116 = 240$).

   Ainsi le polynôme $P$ se factorise suivant

$$P(x) = (x-1)(32x^2 - 124x + 116) \ .$$

3. En déduire $x_m$, position de la section de poutre de flèche maximum entre les points $B$ et $C$.

   Solution : La position $x_m$ de flèche maximum est solution de l'équation $P(x) = 0$.

   D'après la factorisation précédente :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\iff (x-1)(32x^2 - 124x + 116) = 0 \\ &\iff \Big( x - 1 = 0 \text{ ou } 32x^2 - 124x + 116 = 0 \Big) \end{aligned}$$

   La première équation donne $x = 1$ (la solution du 1.), tandis que la deuxième équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-124)^2 - 4 \times 32 \times 116 = 528 > 0$, et admet donc deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-(-124) - \sqrt{528}}{2 \times 32} \simeq 1,58$ et $x_2 = \dfrac{-(-124) + \sqrt{528}}{2 \times 32} \simeq 2,30$.

   $P(x) = 0$ a donc trois solutions, et $x_m = x_1 \simeq 1,58$ (car $x_2 > 2$ est en dehors de la poutre de longueur 2m, et $x = 1$ correspond au point $B$).