2^{nde} **Correction du contrôle de mathématiques**

Exercice 1

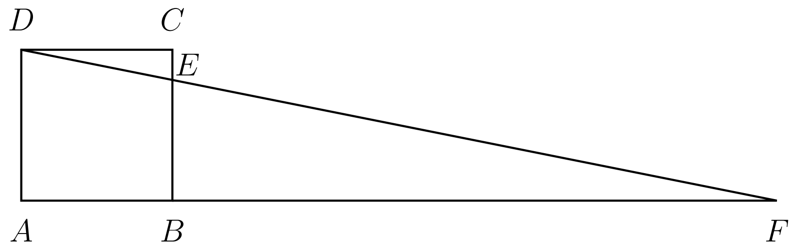
1) On peut calculer les longueurs des côtés de ce triangle :
$\overrightarrow{AB}(3;1)$ et donc, $AB = \sqrt{3^2+1^1} = \sqrt{10}$
$\overrightarrow{BC}(-2;-4)$ et donc, $BC = \sqrt{(-2)^2+(-4)^1} = \sqrt{20}$
$\overrightarrow{AC}(1;-3)$ et donc, $AC = \sqrt{1^1+(-3)^2} = \sqrt{10}$
On remarque que $AB = AC$, et donc le triangle est isocèle en A. De plus, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, et donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle est aussi rectangle en A.

2) Soit $D(x;y)$ les coordonnées de D. $ABDC$ est un quadrilatère si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Or, $\overrightarrow{AB}(3;1)$ et $\overrightarrow{CD}(x;y+1)$. On doit donc avoir $x = 3$ et $y+1 = 1$, donc $y = 0$.
Finalement, le point D a pour coordonnées $D(3;0)$.

3) $\overrightarrow{AD}(4;-2)$, et donc $AD = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$. D'autre part, d'après la question 1), $BC = \sqrt{20}$
Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont la même longueur, ce qui était prévisible car, comme le triangle ABC est rectangle isocèle en A, le parallélogramme $ABDC$ est en fait un carré.

Exercice 2

1)



2) a) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $E\left(1;\dfrac{4}{5}\right)$, $F(5;0)$.

b) $\overrightarrow{DE}\left(1;-\dfrac{1}{5}\right)$ et $DF(5;-1)$. Comme $1\times(-1) = -\dfrac{1}{5}\times 5$, ces deux vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que les points E, D et F sont alignés.

Exercice 3

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;5)$, $B(6;4)$ et $C(7;1)$.
On désigne de plus par $I(x;y)$ le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Comme I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a $IA = IB$, et donc, $IA^2 = IB^2$.
$IA^2 = (-1-x)^2 + (5-y)^2 = 1 + 2x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = x^2 + y^2 + 2x - 10y + 26$, et $IB^2 = (6-x)^2 + (4-y)^2 = 36 - 12x + x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52$.
D'où $IA^2 = IB^2$ est équivalent à $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 26 = x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52$, soit aussi, $y = 7x - 13$.

2) De même que précédemment, $IC = IB$, et donc $IC^2 = IB^2$.
$IC^2 = (7-x)^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50$
Et donc, $IC^2 = IB^2$, $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52 = x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50$, soit aussi, $y = \dfrac{x+1}{3}$.

3) D'après les deux questions précédentes, on a $y = 7x - 13 = \dfrac{x+1}{3}$, d'où $x = 2$, et donc $y = 1$.
Les coordonnées du point I sont donc $I(2;1)$.

Exercice 4

Soit $(x;y)$ les coordonnées du point G. Alors $\overrightarrow{GA}(2-x;-y)$ et $\overrightarrow{GB}(7-x;-y)$.

Ainsi, le vecteur $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(2(2-x)+3(7-x);2(-y)+3(-y))$, soit $(-5x+25;-5y)$.

On doit donc avoir $-5x+25 = 0$, soit $x = 5$, et $-5y = 0$, soit $y = 0$.

Les coordonnées du point G sont $G(5;0)$.