2^{nde} **Correction du devoir surveillé de mathématiques**

Exercice 1

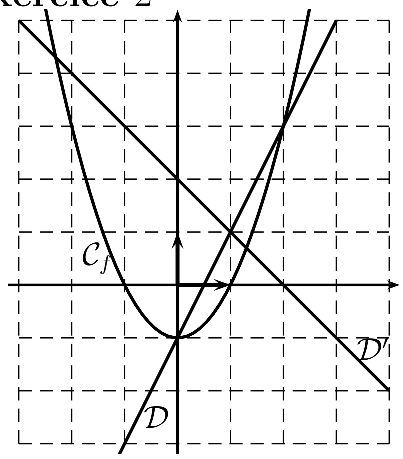
Le tableau $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas un tableau de proportionnalité. Le système admet donc une unique solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 12 \\ -x & + & 4y & = & -14 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times 1 \\ \times 3 \end{array}\right.$$
$$0x + 10y = -30$$
soit $\underline{y = -3}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 12 \\ -x & + & 4y & = & -14 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array}\right.$$
$$5x + 0y = 10$$
soit $\underline{x = 2}$

L'unique solution est donc, $\underline{x = 2 \text{ et } y = -3}$.

Exercice 2



2) Le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ est 2, tandis que celui de $\mathcal{D}'$ est -1 : les deux droites sont donc sécantes et se coupent en un unique point $M(x; y)$ tel que $y = 2x - 1 = -x + 2$, soit $\underline{x = 1 \text{ et } y = 1}$.

3.b) Soit $M(x; y)$ un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$, alors $y = f(x) = x^2 - 1$ et $y = 2x - 1$, d'où, $y = x^2 - 1 = 2x - 1$, soit encore $x^2 - 2x = 0$.
Cette expression se factorise, et s'écrit alors : $x(x - 2) = 0$, et ainsi $x = 0$ ou $x = 2$. On trouve alors, si $x = 0$, $y = -1$, et si $x = 2$, $y = 3$.

<u>Les deux points d'intersections sont $A(0; -1)$ et $B(2; 3)$.</u>

Exercice 3

Soit x le prix d'un CD, et y le prix d'un DVD, alors les achats précédents de Maxime se traduisent par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 51 \\ x & + & 2y & = & 47 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times\ (-1) \\ \times\ 3 \end{array}\right.$$
$$0x + 5y = -51 + 141 = 90$$
soit $\underline{y = 18}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 51 \\ x & + & 2y & = & 47 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times\ 2 \\ \times\ (-1) \end{array}\right.$$
$$5x + 0y = 102 - 47 = 55$$
soit $\underline{x = 11}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un tableau de proportionnalité, donc le système admet une unique solution.

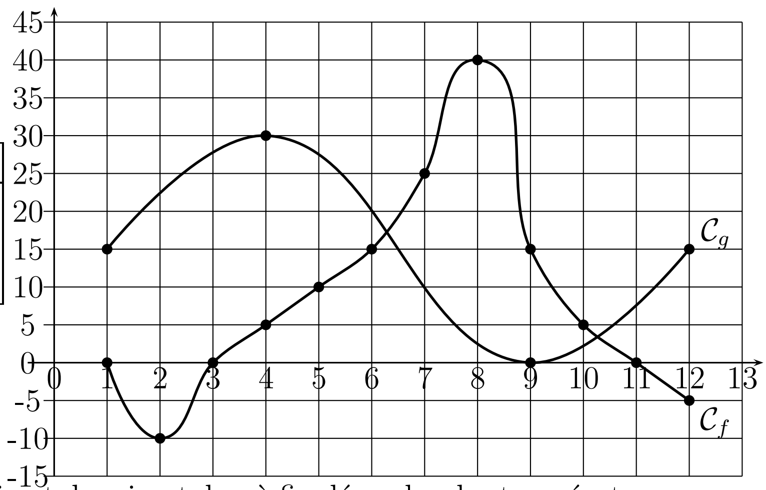
Ainsi, un CD coûte 11 euros, et un DVD 18 euros. Maxime ne pourra donc pas acheter un CD et un DVD supplémentaires avec seulement 25 euros.

Exercice 4 **Partie A.**

1. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = [1; 12]$.
2. $f(x) = 5$ pour $x = 4$ ou $x = 10$
3. $5 \leq f(x) \leq 15$ pour $x \in [4; 6] \cup [9; 10]$
4.

x	1	2	8	12
$f(x)$	0 ↘	-10 ↗	40 ↘	-5

x	1		3		11		12
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	



Partie B.

2. $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in [1; 6,5] \cup [10,5; 12]$

3. On peut en déduire que de mi-janvier à mi-juin et de mi-octobre à fin décembre les températures sont plus basses dans la ville A que dans la ville B.

Exercice 5

a) $f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 14 = 10$. $\quad f\left(-\dfrac{2}{7}\right) = \left(-\dfrac{2}{7}\right)^2 - 5 \times \dfrac{-2}{7} + 14 = \dfrac{760}{49}$

b) $f(2 - \sqrt{5})^2 - 5(2 - \sqrt{5}) + 14 = 13 + \sqrt{5}$

c) $f(2) = 8 \neq 4$, donc $A(2; 4)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f.

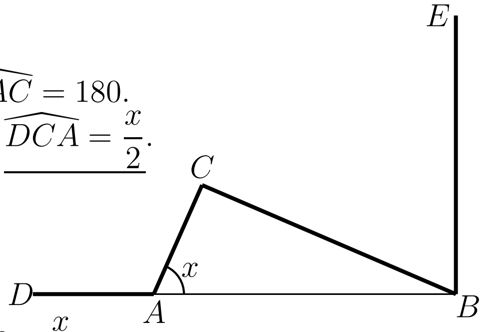
d) Pour tout nombre réel x, $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{31}{4} = x^2 - 2 \times x \times \dfrac{5}{2} + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{31}{4} = x^2 - 5x + 14 = f(x)$.

Soit a et b deux nombres réels quelconques de $]-\infty;\frac{5}{2}]$, tels que $a<b\leq\frac{5}{2}$:
alors, $a-\frac{5}{2}<b-\frac{5}{2}\leq 0$
d'où, $\left(a-\frac{5}{2}\right)^2>\left(b-\frac{5}{2}\right)^2\geq 0$
et donc, $f(a)>f(b)\geq\frac{31}{4}$
ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;\frac{5}{2}]$.

Soit a et b deux nombres réels quelconques de $[\frac{5}{2};+\infty[$, tels que $frac52\leq a<b$:
alors, $0\leq a-\frac{5}{2}<b-\frac{5}{2}$
d'où, $0\leq\left(a-\frac{5}{2}\right)^2<\left(b-\frac{5}{2}\right)^2$
et donc, $\frac{31}{4}\leq f(a)<f(b)$
ainsi, f est croissante sur $[\frac{5}{2};+\infty[$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{31}{4}$	$\searrow$

Exercice 6



DCA est un triangle isocèle, et donc, $\widehat{DCA}=\widehat{ADC}$.
De plus $\widehat{DAC}=180-x$, et $\widehat{DCA}+\widehat{ADC}+\widehat{DAC}=2\widehat{DCA}+\widehat{DAC}=180$.
On en déduit que $2\widehat{DCA}=180-\widehat{DAC}=180-(180-x)=x$, d'où, $\widehat{DCA}=\dfrac{x}{2}$.

De même, dans le triangle isocèle CEB, $\widehat{CEB}=\widehat{ECB}$,
et $\widehat{CEB}+\widehat{ECB}+\widehat{CBE}=2\widehat{ECB}+\widehat{CBE}=180$.
De plus, $\widehat{CBE}=90-\widehat{CBA}=90-(90-x)=x$.
On en déduit que $2\widehat{ECB}=180-\widehat{CBE}=180-x$, soit $\widehat{ECB}=90-\dfrac{x}{2}$.

Au final, $\widehat{DCE}=\widehat{DCA}+\widehat{ACB}+\widehat{BCE}=\frac{x}{2}+90+90-\frac{x}{2}=180$.
On en déduit donc que les points D, C et E sont alignés.

Exercice 7

1. D'après le théorème de Pythagore, $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{58}$.
2. a) Dans le triangle rectangle BAH : $\widehat{BAH}=90-\widehat{ABH}$.

Dans le triangle rectangle BAC : $\widehat{BCA}=90-\widehat{CBA}=90-\widehat{ABH}$. On en déduit donc que $\widehat{BAH}=\widehat{BCA}$.

b) Dans le triangle BAH, $\cos\widehat{BAH}=\dfrac{h}{3}$,

tandis que dans le triangle BAC, $\cos\widehat{BAH}=\cos\widehat{BCA}=\dfrac{7}{BC}=\dfrac{7}{\sqrt{58}}$.

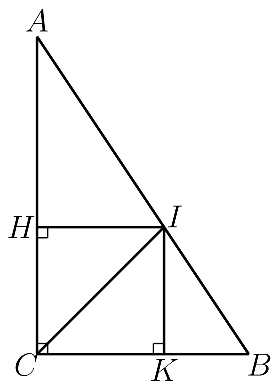
On en déduit donc que $\dfrac{h}{3}=\dfrac{7}{\sqrt{58}}$, soit donc, que $h=\dfrac{3\times 7}{\sqrt{58}}=\dfrac{21}{\sqrt{58}}$.

3. $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{BC\times AH}{2}=\dfrac{\sqrt{58}\times h}{2}$, mais aussi, $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{3\times 7}{2}=\dfrac{21}{2}$.

D'après ces deux expressions de l'aire de ABC, on en déduit que $\dfrac{\sqrt{58}\times h}{2}=\dfrac{21}{2}$, soit $h=\dfrac{21}{58}$.

Exercice 8

1. D'après la figure, on sait déjà que le quadrilatère est un rectangle car il a trois angles droits.
CHI est un triangle rectangle : $\widehat{CHI}=90$.
De plus, comme (CI) est la bissectrice de $\widehat{HCB}$, on a $\widehat{HCI}=45$, et donc aussi $\widehat{HIC}=180-\widehat{CHI}-\widehat{HCI}=180-90-45=45$.
On en déduit que le triangle HCI est isocèle, et donc que $HC=HI$.
Finalement le quadrilatère $HCKI$ est un carré.



2. a) $\mathcal{A}_{AIC}=\dfrac{AC\times HI}{2}=\dfrac{b\times x}{2}$, et, $\mathcal{A}_{CIB}=\dfrac{CB\times KI}{2}=\dfrac{a\times x}{2}$,

b) On en déduit l'aire de ABC : $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ACI}+\mathcal{A}_{CIB}=\dfrac{b\times x}{2}+\dfrac{a\times x}{2}=\dfrac{x}{2}(a+b)$.

3. Par ailleurs, on a aussi : $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{ab}{2}$, d'où, $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{x}{2}(a+b)$,

ou encore, en multipliant par 2 et en divisant par xab, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.