Devoir de mathématiques

A

Exercice 1 $\boxed{\text{A}}$ La moyenne de la série est :

$$\overline{x} = \frac{3\times 12 + 2\times 5 + 1\times 8 + 4\times 9}{10} = 9$$

La variance de la série est :

$$V = \frac{3\times(12-9)^2 + 2\times(5-9)^2 + 1\times(8-9)^2 + 4\times(9-9)^2}{10} = 6$$

d'où l'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{6} \simeq 2,45$

$\boxed{\text{B}}$ La moyenne de la série est :

$$\overline{x} = \frac{3\times 14 + 2\times 5 + 1\times 18 + 4\times 10}{10} = 11$$

La variance de la série est :

$$V = \frac{3\times(14-11)^2 + 2\times(5-11)^2 + 1\times(18-11)^2 + 4\times(10-11)^2}{10} = 15,2$$

d'où l'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{15,2} \simeq 3,9$

Exercice 2

a) $$\begin{aligned}(2x-3) > (2-x)(2x-3) &\iff (2x-3) - (2-x)(2x-3) > 0\\ &\iff (2x-3)\Big[1-(2-x)\Big] > 0\\ &\iff (2x-3)(x-1) > 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2x-3)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $(2x-3) > (2-x)(2x-3) \iff x \in]-\infty;1[\cup]\frac{3}{2};+\infty[$.

b) $\dfrac{2}{3x-6} < 3 \iff \dfrac{2}{3x-6} - 3 < 0 \iff \dfrac{-9x+20}{3x-6} < 0$

x	$-\infty$		2		$\frac{20}{9}$		$+\infty$
$-9x+20$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x-6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-9x+20}{3x-6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\dfrac{2}{3x-6} < 3 \iff x \in \Big]-\infty;2\Big[\cup\Big[\frac{20}{9};+\infty\Big[$

Exercice 3 • $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x}$. On ne doit pas avoir $2x^2 - x = 0 \iff x(2x-1) = 0 \iff$ $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou } 2x-1=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{ou } x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right\}$.

• $h(x) = \sqrt{(2x-1)(x-3)}$. On doit avoir $(2x-1)(x-3) \geqslant 0$.
Pour résoudre cette inéquation, on peut dresser le tableau de signes de $(2x-1)(x-3)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{D}_g = \Big]-\infty;\dfrac{1}{2}\Big]\cup\Big[3;+\infty\Big[$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = (x-2)^2 - 3$ définie sur $[-1; 5]$.

a)

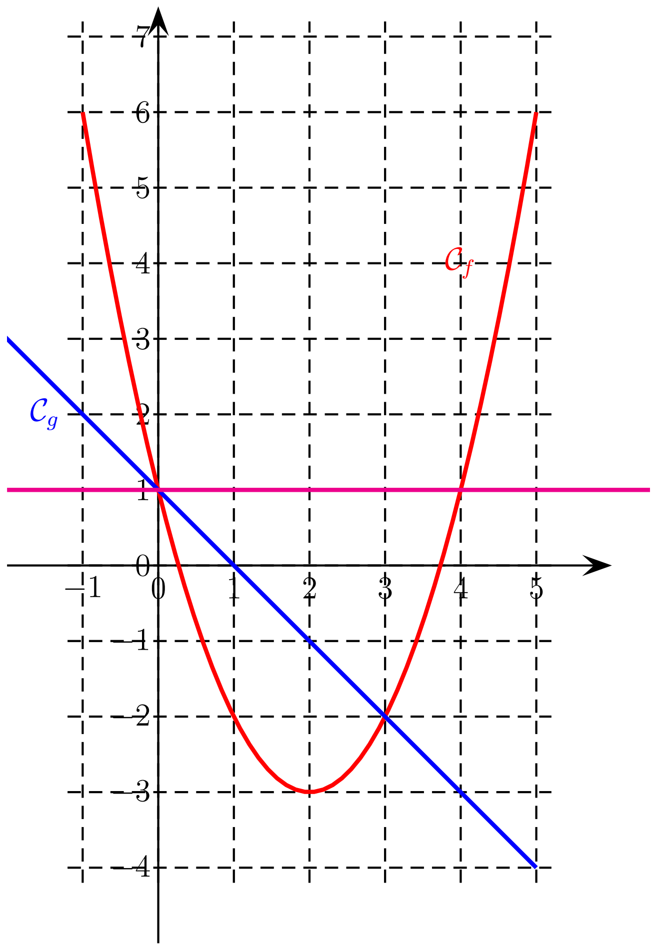
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "-2"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & x-2 \arrow[r, "\text{carré}"] & (x-2)^2 \arrow[r, "-3"] & (x-2)^2-3 \end{tikzcd}$$

b) Soit deux nombres réels quelconques a et b tels que $-1 \leqslant a < b \leqslant 2$
alors $-3 \leqslant a-2 < b-2 \leqslant 0$
donc $9 \geqslant (a-2)^2 > (b-2)^2 \geqslant 0$: carré de nombres négatifs change l'ordre
d'où $6 \geqslant (a-2)^2 - 3 > (b-2)^2 - 3 \geqslant -3$
soit donc $6 \geqslant f(a) > f(b) \geqslant -3$
c'est-à-dire que f change l'ordre et est donc décroissante sur $[-1; 2]$.
On a donc trouvé le tableau de variation

x	-1		2		5
f	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

c) Avec éventuellement un tableau de valeurs pour compléter le tableau de variation précédent :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6



d) Graphiquement on trouve que $f(x) \leqslant 1$ pour $x \in [0; 4]$.

e) Graphiquement on trouve que $f(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in [0; 3]$