Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

(E_1) : $(x^2-11)(3x+7)=0 \iff \left\{\begin{array}{rl} & x^2-11=0 \\ \text{ou,} & 3x+7=0\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rl} & x^2=11 \\ \text{ou,} & x=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-\sqrt{11} \text{ ou, } x=\sqrt{11} \\ \text{ou, } x=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$ $\qquad \underline{\mathcal{S}_1=\left\{-\dfrac{7}{3}\,;\,-\sqrt{11}\,;\,\sqrt{11}\right\}}$

(E_2) : $(2x+3)^2=49 \iff \left\{\begin{array}{rl} & 2x+3=-7 \\ \text{ou,} & 2x+3=7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} & x=-5 \\ \text{ou,} & x=2\end{array}\right.$ $\qquad \underline{\mathcal{S}_2=\{-5\,;\,2\}}$

(E_3) : $3x(2x+1)=2x \iff 3x(2x+1)-2x=0 \iff x\Big(3(2x+1)-2\Big)=0$

$\iff x\,(6x+1)=0 \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{6}\end{array}\right.$ $\qquad \mathcal{S}_3=\left\{0;-\dfrac{1}{6}\right\}$

(E_4) : $\dfrac{2}{2x+5}-\dfrac{1}{4x-3}=0 \iff \dfrac{6x-11}{(2x+5)(4x-3)}=0 \iff \left\{\begin{array}{rl} & 6x-11=0 \\ \text{et,} & (2x+5)(4x-3)\neq 0\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rl} & x=\dfrac{11}{6} \\ \text{et,} & x\neq-\dfrac{5}{2} \text{ et, } x\neq\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$ $\qquad \underline{\mathcal{S}_4=\left\{\dfrac{11}{6}\right\}}$

(E_5) : $\dfrac{3x}{2x+1}=2x \iff \dfrac{3x}{2x+1}-2x=0 \iff x\left(\dfrac{3}{2x+1}-2\right)=0$

$\iff x\dfrac{-2x+2}{2x+1}=0 \iff \left\{\begin{array}{rl} & x(-4x+1)=0 \\ \text{et,} & 2x+1\neq 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ ou } x=\dfrac{1}{4} \\ \text{et, } x\neq-\frac{1}{2}\end{array}\right.$, $\underline{\mathcal{S}_5=\left\{0;\dfrac{1}{4}\right\}}$.

(E_6) : $\left(\dfrac{2}{2x+1}\right)^2=9 \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{2x+1}=\sqrt{9}=3 \\ \dfrac{2}{2x+1}=-\sqrt{9}=-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{2x+1}-3=0 \\ \dfrac{2}{2x+1}+3=0\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-6x-1}{2x+1}=0 \\ \dfrac{6x+5}{2x+1}=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} & -6x-1=0 \\ \text{ou} & 6x+5=0 \\ \text{et} & 2x+1\neq 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} & x=-\dfrac{1}{6} \\ \text{ou} & x=\dfrac{5}{6} \\ \text{et} & x\neq-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ $\qquad \mathcal{S}_6=\left\{-\dfrac{1}{6};\dfrac{5}{6}\right\}$

Exercice 2

a) De manière générale : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, et donc $\overrightarrow{AB}(8; -10)$ et $\overrightarrow{AD}(20; 1)$

b) On a alors, $AB = \sqrt{8^2 + (-10)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ et $AD = \sqrt{20^2 + 1^2} = \sqrt{401}$

c) Soit $F(x; y)$, alors d'une part $\overrightarrow{AF}(x+1; y-2)$
et d'autre part, d'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(28; -9)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &\iff \left\{\begin{array}{l} x+1 = 28 \\ y-2 = -9 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = 27 \\ y = -7 \end{array}\right.\end{aligned}$$

On a donc trouvé $F(27; -7)$.

d) Le centre I est le milieu de $[AB]$, et a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{-1+7}{2}; \dfrac{2+(-8)}{2}\right)$, soit, $\underline{I(3; -3)}$.
On calcule : $\overrightarrow{AB}(8; -10)$, et donc, $AB = \sqrt{8^2 + (-10)^2} = \sqrt{164} = \sqrt{4 \times 41} = 2\sqrt{41}$.
On en déduit que le rayon du cercle est $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{41}$.

e) On calcule la longueur IE : on a $\overrightarrow{IE}(4; 5)$, et donc $IE = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = R$.
E est donc bien sur le cercle de diamètre $[AB]$.

f) Soit $G(x; y)$ alors d'une part $\overrightarrow{AG}(x+1; y-2)$ et d'autre part $\overrightarrow{GB}(7-x; -8-y)$.
On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} &\iff \left\{\begin{array}{l} x+1 = 7-x \\ y-2 = -8-y \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2y = -6 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right.\end{aligned}$$

Remarque : ce point G est le milieu du segment $[AB]$ (faire un dessin avec les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$) !