Équation de droites et systèmes d'équations

1 Equations de droites

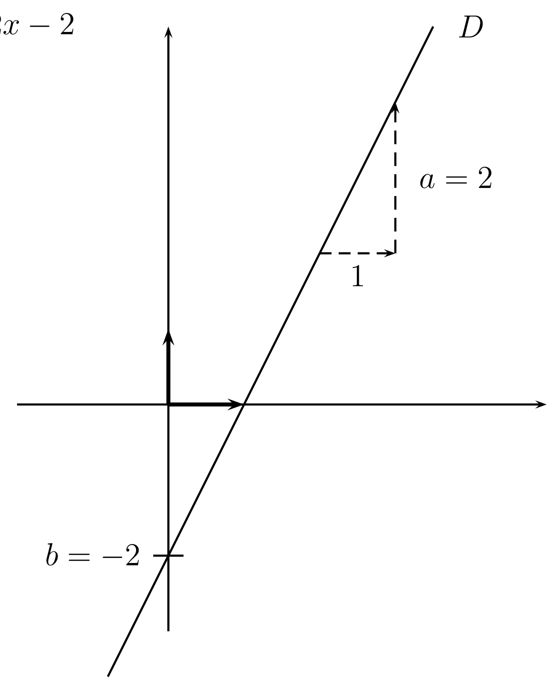
Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Propriété: *Toute droite du plan à une équation de la forme :*

- $y = ax + b$ *où* a *et* b *sont deux nombres réels, si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ;*
- $x = k$ *où* k *est un nombre réel, si elle est parallèle à l'axe des ordonnées.*
- *Soit* $D : y = ax + b$*, alors le point* $A(0; b)$ *est sur la droite* D *;* b *s'appelle l'ordonnée à l'origine de la droite* D*.*
- *Lorsque* x *augmente de* 1*,* y *varie de* a *;* a *s'appelle le coefficient directeur de la droite.*

Remarque : Toute droite d'équation $y = ax + b$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$.

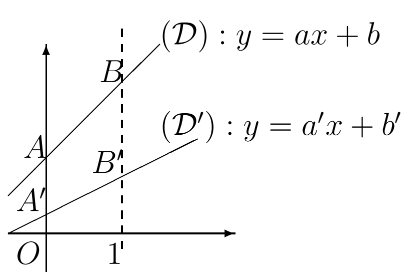
Ex. $D : y = 2x - 2$



Ex. Tracer les droites $D_1 : y = 3x - 2$ et $D_2 : y = -2x + 1$.

Propriété: *Les droites d'équations* $y = ax+b$ *et* $y = a'x+b'$ *sont parallèles si et seulement si* $a = a'$*.*

Démonstration :



Les points $A(0, b)$ et $B(1, a + b)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$. $\overrightarrow{AB}(1, a)$ est donc un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
De même, $\overrightarrow{A'B'}(1, a')$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}//\mathcal{D}' &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \text{colinéaires} \\ &\iff 1 \times a - 1 \times a' = 0 \\ &\iff a = a' \end{aligned}$$

Ex : Soit les droites d'équation $\mathcal{D}: \ y = 2x+2$ et $\mathcal{D}': \ y = -x+5$.
Représenter sur un même graphique ces deux droites.
Montrer qu'elles sont sécantes en un unique point I.
Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection I, puis déterminer ses coordonnées exactes par le calcul.

Ex : Même exercice avec les droites $\mathcal{D}: \ y = 3x+1$ et $\mathcal{D}': \ y = -6x+4$.

Définition: *L'équation d'une droite sous la forme $y = ax+b$ s'appelle l'équation réduite de la droite.*

Propriété: *Toute droite du plan a une équation de la forme $ax+by = c$, où a, b et c sont des nombres réels.*

Ex : Donner l'équation réduite de chacune des droites suivantes, puis déterminer leur coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

- $\mathcal{D}_1: \ 4x+2y = 8$ • $\mathcal{D}_2: \ 2x-4y = 12$ • $\mathcal{D}_3: \ -3x+2y = 6$ • $\mathcal{D}_4: \ x+3y = 5$

Tracer dans un repère ces quatre droites.

Ex : Parmi les droites suivantes, lesquelles sont parallèles ?

- $\mathcal{D}_1: \ 4x+2y = 8$ • $\mathcal{D}_2: \ -2x+6y = 6$ • $\mathcal{D}_3: \ -2x-y = -9$
- $\mathcal{D}_3: \ 4x+12y = 12$ • $\mathcal{D}_4: \ x+3y = 5$

Ex : Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}: \ 6x-2y = -2$ et $\Delta: \ 6x+y = 4$.
Montrer qu'elles sont sécantes, et calculer les coordonnées du leur point d'intersection.
Vérifier que le couple de coordonnées trouvé est bien solution du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 2y & = & -2 \\ 6x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

2 Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition: *Soit a, b, c, a', b' et c' six réels. On appelle système linéaires de deux équations à deux inconnues le système :*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c' \end{array}\right.$$

Résoudre le sytème consiste à trouver tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Ex : Résoudre les systèmes :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrl} 5x & + & 3y & = 7 \\ x & - & 2y & = -7 \end{array}\right. \ ; \ (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 7 \\ 4x & + & 2y & = 9 \end{array}\right.$$

Propriété: *Le système*

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrl} ax & + & by & = c \\ a'x & + & b'y & = c' \end{array}\right.$$

admet une unique solution si et seulement si le tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ n'est pas un tableau de proportionnalité, soit donc, si $ab'-a'b \neq 0$.
Dans le cas $ab'-a'b = 0$, le sytème possède soit aucune solution, soit une infinité de solution.

Démonstration : Si $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, alors le système se réécrit :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{array} \right.$$

Les deux droites sont sécantes, et donc le système admet une unique solution, si et seulement si les coefficients directeurs ne sont pas égaux, soit $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{a'}{b'}$, c'est-à-dire, si $ab' - a'b \neq 0$.

Ex : Par exemple, pour les systèmes (S_1) et (S_2) précédents, on a respectivement : $ab' - a'b = 33 \neq 0$ et $ab' - a'b = 4 - 4 = 0$.

Ex : Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2 \\ x & + & 4y & = & 10 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 21 \\ 4x & - & y & = & 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & 5 \\ 5x & - & 6y & = & -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} -5x & + & 2y & = & -9 \\ 2x & + & 5y & = & -8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & -6 \\ -3x & + & 6y & = & 9 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & -4 \\ -3x & + & 6y & = & 9 \end{array} \right.$$

Ex : Sachant qu'un éléphant et une souris pèsent ensemble 3 tonnes et 100 grammmes, et que l'éléphant pèse 3 tonnes de plus que la souris, combien pèse la souris ?

Ex : Après un devoir, Pierre et Paul discutent ensemble de leur note de devoir sur 40 :
Pierre : *"Si tu me donnais 3 points, ma note serait le double de la tienne"*
Paul : *"Mais si toi tu me donnais 4 points, j'aurais alors la même note que toi"*

Quelles notes ont-ils eu à ce devoir ?

Ex : Une usine fabrique deux sortes d'objets en bois : A et B.
L'objet A nécessite $1,2$ kg de bois et 2 h de fabrication.
L'objet B nécessite 2 kg de bois et 3 h de fabrication.

Pour produire ces objets, on a utilisé 54 kg de bois et la fabrication a duré 84 heures.

Combien d'objets A a-t-on fabriqués ? d'objets B ?

Ex : *Un peu d'arithmétique pour une offre intringuante.*
Je vous propose l'offre suivante : *"je donnerai 100 euro à celui qui me donnera 5 euro en 20 pièces de 50 centimes, 20 centimes ou 5 centimes"*.
Qu'en pensez-vous ?