2^{nde} # Résolution d'inéquations

Méthode générale pour résoudre une inéquation

On se ramène à une inéquation de la forme $A(x) \leq 0$, ou $A(x) < 0$, ou $A(x) \geq 0$ ou $A(x) > 0$, en prenant garde à l'ordre (c'est-à-dire au sens de l'inéquation) à chaque opération effectuée, et avec $A(x)$ une expression algébrique ne contenant <u>que</u> des produits et/ou quotients de termes du premier degré (de la forme $ax+b$).

On peut alors dresser un tableau de signes et appliquer la règle des signes pour les produits et quotients.

<u>Remarque/Rappel :</u> Chercher le signe de l'expression algébrique $A(x)$ signifie résoudre les inéquations $A(x) < 0$, $A(x) > 0$ et $A(x) = 0$.

<u>Exemple :</u> Résoudre l'inéquation : $(I)\ :\ x(x+2) \geq (2x+1)(x+2)$.

On transforme tout d'abord l'inéquation pour se ramener à une étude de signes de facteurs du premier degré :

$$\begin{aligned}(I)\ :\ &\iff x(x+2)-(2x+1)(x+2) \geq 0\\ &\iff (x+2)\Big[x-(2x+1)\Big] \geq 0\\ &\iff (x+2)\left[-x-1\right] \geq 0\end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de signes de l'expression $(x+2)(-x-1)$:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+2)(-x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On veut que ce produit soit positif ou nul ; les solutions de l'inéquation sont donc : $\underline{\mathcal{S} = [-2;-1]}$.

Propriété *(Signe d'une expression du premier degré)*
Soit a et b deux nombres réels quelconques, avec $a \neq 0$, alors

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		*Signe de -a*	0	*Signe de a*	

<u>Exercices :</u> Résoudre les inéquations :

$(I_1)\ :\ (2x+3)(-3x+2) > 0$

$(I_2)\ :\ x(3x+1) < (2x+3)x$

$(I_3)\ :\ (2x+4)^2 \geq (2x+4)(x-3)$

$(I_4)\ :\ x^2 \geq 9$

$(I_5)\ :\ 1+\dfrac{1}{x+2} \leq 0$

$(I_6)\ :\ \dfrac{2x+3}{5x-20} \geq 3$

$(I_7)\ :\ 8-\dfrac{11x+12}{2x-3} \geq 2$

$(I_8)\ :\ \dfrac{3}{2x+1} < \dfrac{4}{x-3}$