Calcul numérique et algébrique

Exercice 1 Simplifier les nombres ou expressions suivants :

$A = \dfrac{5}{2} + \dfrac{8}{3}$; $B = \dfrac{7}{12} - \dfrac{2}{3}$; $C = 2 + \dfrac{5}{7}$; $D = 4 + \dfrac{3}{9}$;

$E = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{4}{15}$; $F = \dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{3}{5}}$; $G = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{6}}$; $H = \dfrac{\frac{8}{3}}{6}$

$H = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x+2}$; $I = \dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{2}{5x}$; $J = 5 + \dfrac{3}{2+x}$; $K = \dfrac{1}{2-3x} - \dfrac{1}{2+3x}$

Exercice 2

a) Développer les expressions suivantes, et regrouper et ordonner les termes :

- $A(x) = (x+2)(2x-3)$ • $B(x) = (3-2x)(3x-2)$ • $C(x) = (x+2)(2x-3)(-3x+1)$
- $D(x) = (x+3)^2$ • $E(x) = (3x-4)^2$ • $F(x) = \left(3x + \dfrac{1}{3}\right)^2$

b) Factoriser les expressions suivantes :

- $F(x) = (2x-3)(x-2) - (2x-3)(x+4)$ • $G(x) = (-2x+5)^2 + (-2x+5)(3x-4)$
- $H(x) = (3x^2+2x)(x-6) - (x+7)(3x^2+2x)$ • $I(x) = (x-2)(x^2-9) + (-x+2)(x-3)$

c) Compléter, à partir des expressions algébriques précédentes :

- $A(2) = \ldots$ • $A(-2) = \ldots$ • $B(1) = \ldots$ • $B(-1) = \ldots$
- $C(2) = \ldots$ • $C\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ldots$ • $D(-1) = \ldots$ • $E(-2) = \ldots$

d) Résoudre les équations suivantes :

- $A(x) = 0$ • $B(x) = 0$ • $H(x) = 0$ • $I(x) = 0$ • $A(x) = B(x)$

I - Les différents ensembles de nombres

Définition:

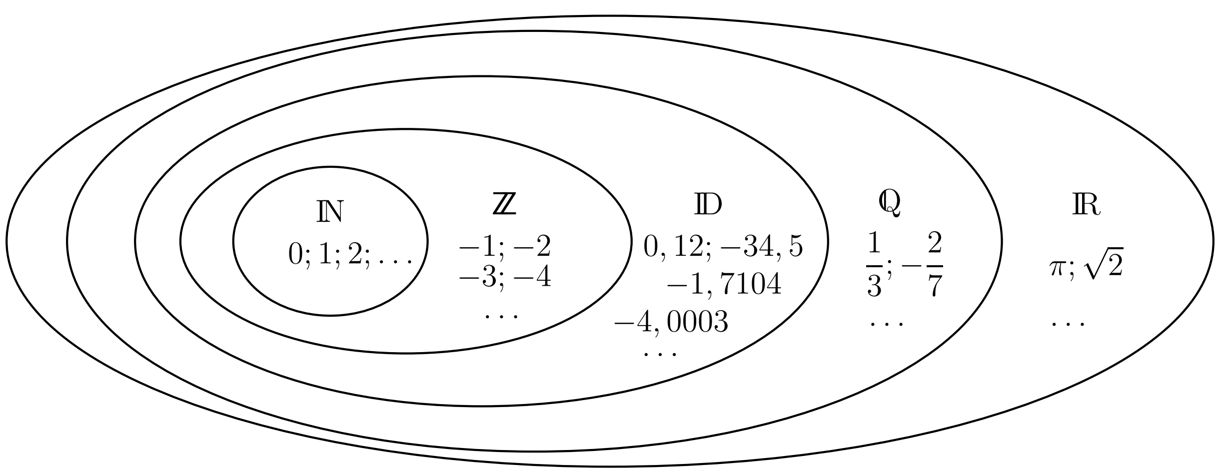
- *L'ensemble des nombres* **entiers naturels** *: 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... est noté* $\mathbb{N}$.
- *L'ensemble des nombres* **entiers relatifs** *: ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... est noté* $\mathbb{Z}$.
- *L'ensemble des nombres* **décimaux** *: -5,67 ; -2 ; 0,4 ; 1,217, ... est noté* $\mathbb{D}$. *Les nombres décimaux sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme* $a \times 10^b$, *avec a et b des entiers.*
- *L'ensemble des nombres* **rationnels** *:* $-\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{185}{4}$; 2 ; *est noté* $\mathbb{Q}$. *Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme* $\dfrac{a}{b}$ *où a et b sont des nombres entiers, avec b non nul.*
- *L'ensemble de tous les nombres s'appelle l'ensemble des* **nombres réels** *; on le note* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.*

Exercice 3 Compléter le tableau suivant : si le nombre appartient à l'ensemble de nombres, le réécrire sous une forme adaptée, sinon mettre une croix dans la case.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
25					
-12					
-5.2					
$-\dfrac{12}{3}$					
$\dfrac{\sqrt{81}}{3}$					
$\dfrac{5}{4}$					
$\dfrac{2}{3}$					
$\sqrt{3}+2$					
$\dfrac{\pi}{3}$					

Notation:
- *Le Symbole "$\in$" signifie "appartient à", par exemple* $11 \in \mathbb{N}$ *;* $11 \in \mathbb{D}$ *;* $\pi \in \mathbb{R}$*.*
- *Le symbole "$\subset$" signifie "est inclus dans", par exemple* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$*.*

Propriété: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Donner la nature d'un nombre, c'est donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

Exemple : • $-5,2 \in \mathbb{R}$, $-5,2 \in \mathbb{Q}$, $-5,2 \in \mathbb{D}$, donc $-5,2$ est un nombre décimal.

• $\dfrac{5}{3} \in \mathbb{R}$, $\dfrac{5}{3}\mathbb{Q}$, donc $\dfrac{5}{3}$ est un nombre rationnel.

II - Nombres premiers

Définition: *On appelle nombre premier tout nombre entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Exemple : $11 = 11 \times 1$, n'est divisible que par 1 et lui-même ; 11 est un nombre premier.

$63 = 7 \times 9$ n'est pas un nombre premier.

Remarques :

— 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers : tout nombre divise 0, tandis que seul 1 divise 1.
— 2 est le plus petit nombre premier, et c'est le seul qui soit pair.
— Les nombres premiers inférieurs à 20 sont : 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Propriété: *Tout nombre entier non premier plus grand que 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.*

Exemple : $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$, $42 = 2 \times 3 \times 7$, $600 = 6 \times 100 = 2 \times 3 \times (5 \times 2)^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Activité : Carrelage d'une pièce

On souhaite carreler une pièce rectangulaire de longueur L=462 m et de largeur l=70 m, à l'aide de carrelages carrés.

On souhaite de plus utiliser le plus petit nombre possible de carrelages, ou, en d'autres termes, des carrelages de côté le plus grand possible.

Quelle est la taille de ces carrelages ?

III - Calcul sur les réels

1 - Calcul sur les fractions

Propriété: *Si a, b, c sont trois nombres réels non nuls, alors $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$, et $a \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \times b}{c}$.*

Définition: *On appelle inverse du nombre a non nul, le nombre $\dfrac{1}{a}$.*

Exemple : L'inverse de 2 est $\dfrac{1}{2} = 0,5$.

Propriété: *L'inverse de la fraction $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des nombres non nuls, est $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$.*

Exercice 4 Ecrire sous forme de fraction irréductible les nombres :

$$a = \frac{\frac{1}{2}}{5} \; ; \quad b = \frac{4}{\frac{2}{6}} \; ; \quad c = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{10}{6}} \; ; \quad d = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{14}{27}} \; ; \quad e = \frac{\frac{2}{x+1}}{3} \; ; \quad f = \frac{\frac{x^2+x}{x-3}}{\frac{x+1}{x^2-9}} \; ; \quad g = 2 + \frac{\frac{1}{3}x}{x+1}$$

2 - Calcul sur les radicaux

a) Règles de calcul sur les radicaux

Propriété: *Soit a et b deux nombres positifs, alors :*

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Mais, comme pour les identités remarquables, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Exemples :

- $\sqrt{9\times 16} = \sqrt{9}\times\sqrt{16} = 3\times 4 = 12$
- $\sqrt{\dfrac{49}{25}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$.
- $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right) = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}\sqrt{8} = 2+\sqrt{16} = 2+4=6$
- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9}+\sqrt{16} = 7$

Exercice 5 Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\sqrt{27}\times 5\sqrt{6}$; $B=7\sqrt{75}-2\sqrt{12}$; $C=2\sqrt{5}+\sqrt{0,0045}$; $D=\left(11\sqrt{5}-5\sqrt{11}\right)\left(11\sqrt{5}+5\sqrt{11}\right)$

Exercice 6 Soit $X=\sqrt{10-\sqrt{84}}+\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

1. Calculer X à la calculatrice.
2. Développer X^2, puis en déduire X, et retrouver le résultat précédent.
3. Mêmes questions avec $Y=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ et $Z=\sqrt{15-\sqrt{216}}+\sqrt{15+\sqrt{216}}$.

Exercice 7

1. Soit $X=\sqrt{24}-\sqrt{6}$. Calculer X^2, puis en déduire la valeur de X.
2. Soit $X=\sqrt{50}-\sqrt{8}$. Calculer X^2, puis en déduire la valeur de X.

3.2.2 Méthode pour rendre entier un dénominateur comportant une racine carrée

Exemple : Écrire les fractions sans racine carrée au dénominateur : $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

Méthode 1 : Le dénominateur est un produit ayant pour facteur $\sqrt{a}$ (avec a positif) : on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$, et on utilise la règle $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

Exemple : $\dfrac{7}{3\sqrt{5}} = \dfrac{7}{3\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

Méthode 2 : Le dénominateur est une somme dont les termes contiennent une racine carré,

1. Si le dénominateur s'écrit $a+\sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a-\sqrt{b}$;
2. Si le dénominateur s'écrit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Exemples : $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{3\times(2-\sqrt{3})}{\left(2+\sqrt{3}\right)\times(2-\sqrt{3})} = 3(2-\sqrt{3})$

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} = 2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$$

Exercice 8 Ecrire les nombres suivants sous forme d'une seule fraction sans radicaux au dénominateur :

$a=\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$; $b=\dfrac{14}{3\sqrt{7}}$; $c=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$; $d=\dfrac{2+\sqrt{10}}{1+\sqrt{10}}$; $e=\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $f=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$g = \dfrac{2}{4-\sqrt{2}}$; $h = \dfrac{3}{4\sqrt{2}-3}$; $i = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; $j = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; $k = \dfrac{1}{2-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

$l = \dfrac{1}{\sqrt{2}-2} + \dfrac{3}{\sqrt{3}}$; $m = \dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$; $n = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}+2}$; $p = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

IV - Puissance d'un nombre

1 - Règles de calcul sur les puissances

Définition: *Si a est un nombre et n un entier naturel non nul, on appelle puissance n-ième de a, le nombre $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ termes}}$. On pose, pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.*

Par convention, on pose $a^0 = 1$, pour tout nombre a non nul.

Exemple : $3^2 = 9$; $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$; $-3^2 = -3 \times 3 = -9$

$$3^4 \times 3^5 = \underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{4 \text{ termes}} \times \underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{5 \text{ termes}} = \underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{9 \text{ termes}} = 3^9$$

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{5^2}{2^2}$; $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -3^3 = -27$

$$4^5 \times 4^{-2} = 4^5 \times \frac{1}{4^2} = \frac{4 \times \cdots \times 4}{4 \times 4} = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

Propriété: *Si a et b sont des nombres et n et m des entiers relatifs, alors*

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemple : $2^3 \times 2^2 = 2^5$; $5^7 \times 5^{-4} = 5^3$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \left(a^{-2}\right)^3 \times a$
- $B = \left(a^{-5}b^2\right)^{-1} \times ab^{-3}$
- $C = \dfrac{a^5b^{-4}}{a^{-5}b^{-2}}$
- $D = \dfrac{16^{-4} \times 3^{21}}{6^3 \times 9^7}$
- $E = \left(-2x^5\right)^{-4}$
- $F = -2x^3 \times 5x \times 3^{-2}x^{-5}$
- $G = \dfrac{2^{-5} \times (-6)^3 \times 3^{-4}}{-9^{-2} \times 8^{-4}}$
- $H = \dfrac{ab^{-3}\left(a^{-2}b^3\right)\left(ab^{-1}\right)^2}{\left(ab^2\right)^{-1}ab}$

Exercice 10 On sait que $b^3 = 5,832$ et $b^5 = 18,89$. Sans calculer b, calculer b^2 et b^6. En déduire b.

2 - Cas des puissances de 10

Propriété: *Si n est un entier naturel,*

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ zéros}} \ , \ et, \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00\cdots0}_{n \text{ zéros}}1$$

Ex : $10^2 = 100$; $10^5 = 100\,000$; $10^{-1} = 0,1$; $10^{-4} = 0,000\,4$

Exercice 11 Ecrire sous la forme d'une puissance de 10 :

$$I = 1000^7 \times 0,01^{10} \ ; \ J = \frac{100^3}{0,1^9 \times 10000^3} \ ; \ K = \frac{(0,001)^3(-10000)^5}{(0,01)^{-4}} \ ; \ L = \frac{(0,0001)^{-4}(10000)^5(-0,001)^7}{(10 \times 0,01^3)^4}$$

3 - Ecriture scientifique

Propriété: *Tout nombre réel r peut s'écrire sous la forme $r = \pm M \times 10^n$, où M est un nombre décimal tel que $1 \leq M < 10$, et n est un entier relatif.*
Cette écriture s'appelle l'écriture scientifique du nombre r.

Exemple : $126 = 1,26 \times 10^2$, $232\,519 = 2,325\,19 \times 10^5$, $0,000\,0536 = 5,36 \times 10^{-5}$