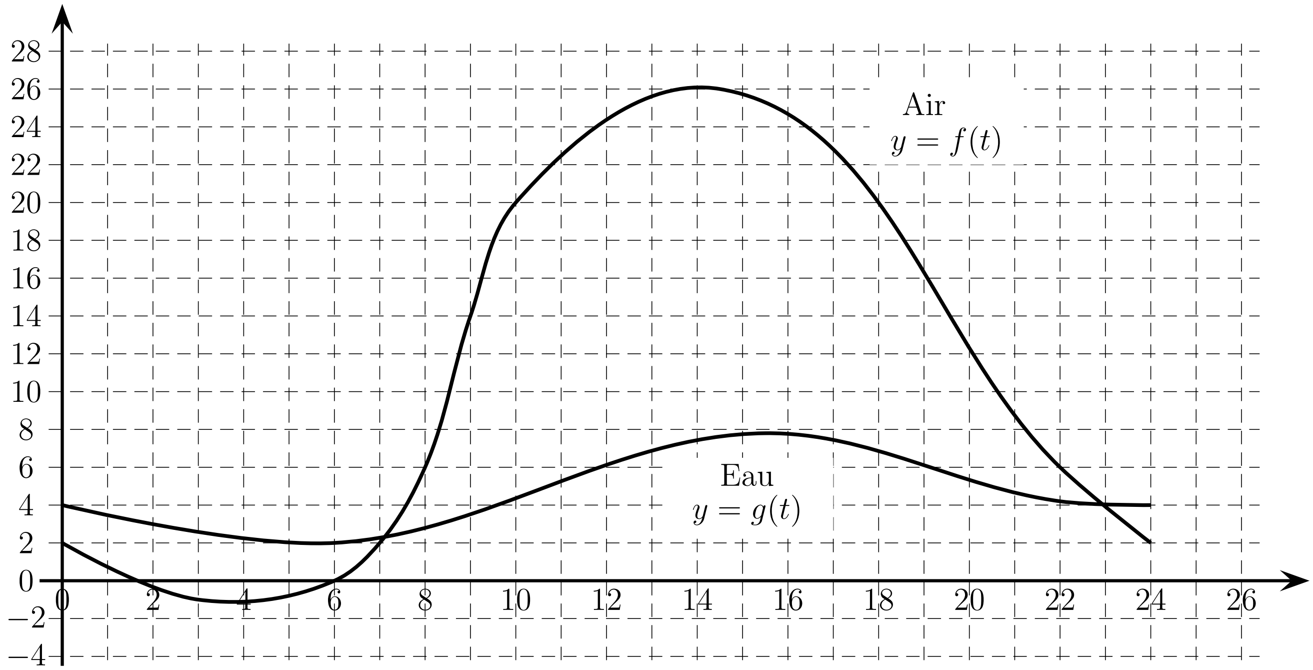
Généralités sur les fonctions

Seconde

Table des matières

Exercice 1 **Relevé de températures : courbes et fonctions**

Voici les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.



On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heures et désigné par la variable t.

1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

	Langage mathématique	Langage courant
a.	$f(17) = 24$	A 17 h, la température de l'air était de 24° C.
b.	L'image de 6 par g est 2.	A 6 h, la température ...
c.	Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure ... ?
d.	Le maximum de la fonction f est 26	
e.	Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$.	Entre 1 h et 6 h ...
f.	$f(7) = g(7)$	A 7 h, ...
g.	Résoudre $f(t) = g(t)$.	
h.	f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

2. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :

	Langage courant	Langage mathématique
a.	A minuit, la température de l'eau était de 4° C.	
b.	A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4° C ?	
c.	A 8 h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
d.	A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
e.	La température minimale de l'eau est de 2° C.	
f.	Entre 6 h et 15 h, la température de l'eau monte.	

Exercice 2 Programme de calcul : définition algébrique d'une fonction

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre entier naturel	10	5	n
Multiplier par 2 Ajouter 1 Elever au carré Soustraire 1 Multiplier par 3			
Résultat	1320		

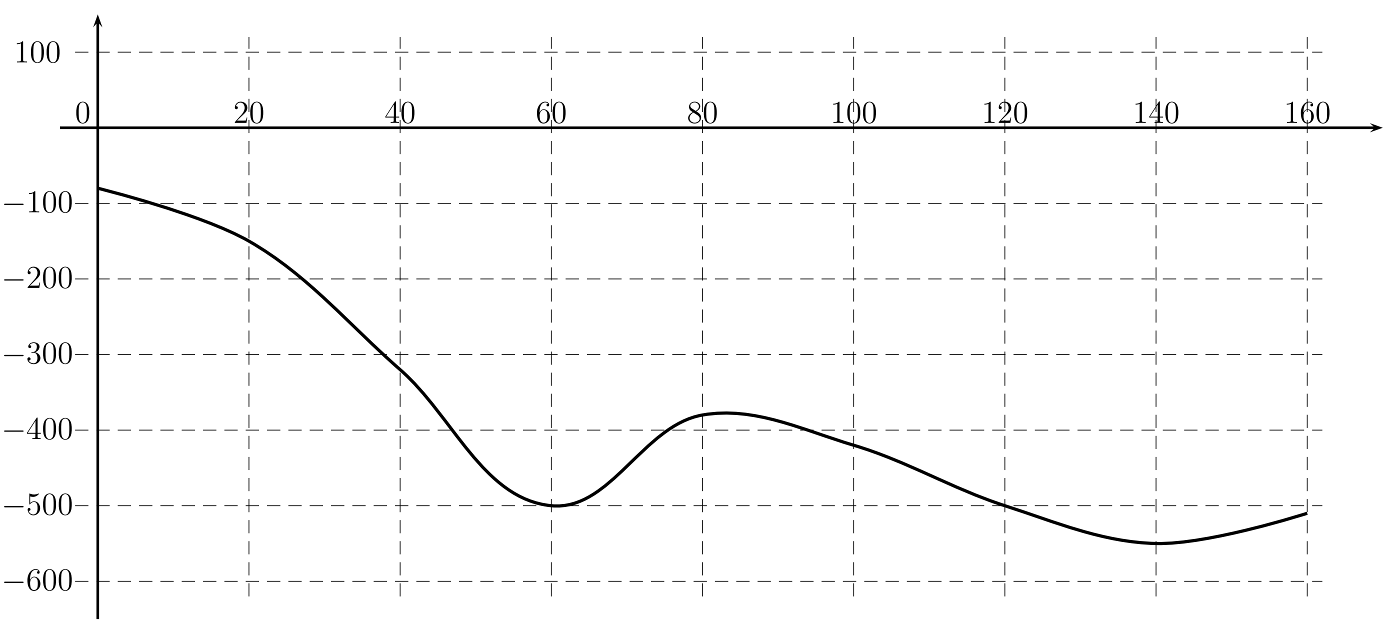
1. Compléter le tableau et montrer que le résultat, pour un nombre réel x quelconque est $12x^2 + 12x$.
2. On a ainsi défini la fonction f par l'expression algébrique : $f(x) = \quad \ldots$
3. Quel est le résultat du programme si on introduit le nombre 15 ? le nombre $3,5$?
4. Quel nombre peut-on introduire de façon à ce que le résultat du programme soit nul ?

Exercice 3 Une fonction et sa courbe

A l'aide d'un sonar, un navire sonde le fond marin. Pour cela, il se déplace en suivant une ligne droite d à partir d'un point d'origine et il émet des salves d'ultrasons.

Il mesure le temps qui s'écoule avant de recevoir l'écho des ultrasons et en déduit la profondeur $h(x)$ de la mer sous le point situé à la distance x de son point d'origine.

Le relevé est donné par le graphique suivant :



1. Donner un titre, utilisant le terme fonction, au graphique, et à ces axes.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
3. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 50 ? d'abscisse 120 ?
4. Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée -200 ? d'ordonnée -400 ? d'ordonnée -500 ?
5. Quels sont les extréma de le fonction h ?

Exercice 4 **A propos des fonctions : éléments caractéristiques d'une fonction**

On dispose au sujet d'une fonction numérique f des renseignements suivants :

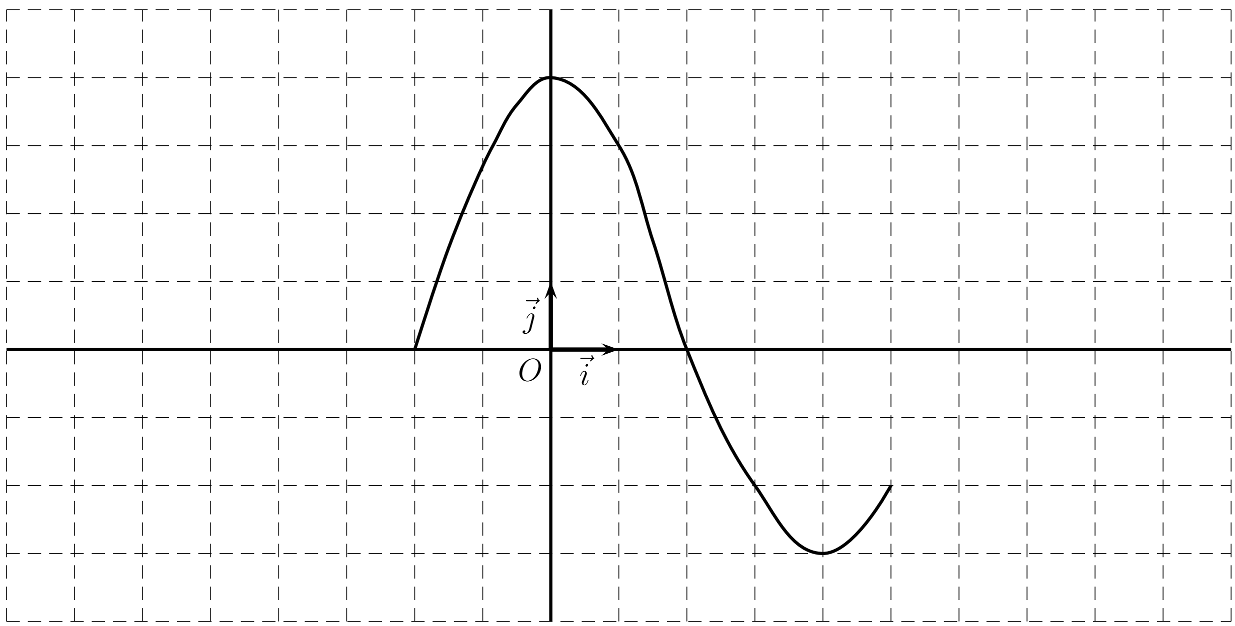
- L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = [-2; 9]$
- Un tableau de valeurs de f est :

x	-2	-1.5	-1	0	1	2	3	4	5	5,5	8,5
$f(x)$	0	1,5	2,7	4	3	0	-2	-3	-2	$-1,5$	-2

- Le tableau de variations de f :

x	-2		0		4		7		9
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3

- On sait d'autre part que la représentation graphique de f, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est une courbe que l'on peut tracer sans lever le crayon, et dont on fournit l'extrait suivant :



1. Compléter le tableau suivant :

	valeur trouvée	exacte ou approchée	renseignement(s) utilisé(s)
$f(-1)$			
$f(-0,5)$			
$f(7)$			
$f(6)$			
$f(8)$			
$f(-2,5)$			

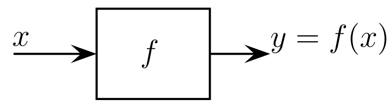
2. Résoudre les équations proposées, en remplissant le tableau comme précédemment :

	valeur(s) trouvée(s)	exacte(s) ou approchée(s)	renseignement(s) utilisé(s)
$f(x) = 3$			
$f(x) = -0,5$			
$f(x) = -1$			
$f(x) = -2$			
$f(x) = -2,5$			
$f(x) = 5$			

I Définition d'une fonction

Définition: *Soit D un ensemble de nombres réels, par exemple un intervalle.*
Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x de l'ensemble D, un nombre unique noté $f(x)$.

*L'ensemble D est l'**ensemble de définition** de la fonction f.*
*Le nombre $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f.*
*Si x vérifie $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y.*



Exemple: *Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$.*
L'ensemble de définition est $D = [-3; 5]$.
Le nombre 4 a pour image $f(4) = (4)^2 - (4) + 2 = 14$.
On peut calculer de même $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$. Ainsi 0 et 1 sont deux antécédents de 2 par f.

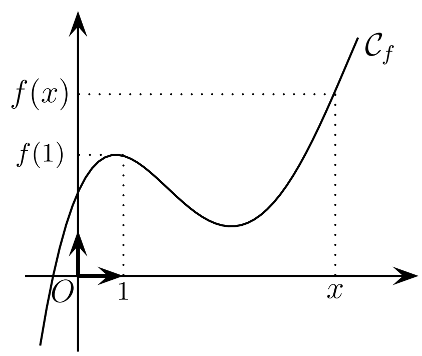
Exemple: *Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$*
Déterminer l'image de -5 ; 0 ; 3 et 10, puis rechercher les antécédents de 0.

(Réponses : les images sont 30, 0, 6, 90.
Les antécédents de 0 sont les nombres x tels que $f(x) = 0 \iff x^2 - x = 0$ puis, après factorisation et équation produit nul, on trouve deux antécédents : 0 et 1.)

II Courbe représentative d'une fonction

Définition: *On appelle courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$, où x parcourt l'ensemble de définition E de f.*

En d'autres termes, le point $M(x; y)$ est sur la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $y = f(x)$.



Exemple: *Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.*
$A(1, 2)$ est sur la courbe de f, car $f(1) = 2$.
$B(-3, 34)$ est sur la courbe de f, car $f(-3) = 34$.
$C(2, 4)$ n'est pas sur la courbe de f, car $f(2) = 9 \neq 4$.

Exercice 5 On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :
- son ensemble de définition est $D = [-5; 4]$;
- les nombres -4 et 4 ont la même image 3 ;
- les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;
- le nombre -5 est un antécédent de 0 par f ;
- $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0,5$.

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

Définition: *Un tableau de valeurs pour une fonction f donne la correspondance entre des valeurs de la variable x et les valeurs de son image $f(x)$.*

Exemple: *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5;4]$ par :* $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+1$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{69}{4}$	13	$\frac{37}{4}$	6	$\frac{13}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	-2	$-\frac{11}{4}$	-3

Remarque : On peut choisir des valeurs quelconques de la variable x dans l'ensemble de définition de f, ou un écart régulier ; on appelle alors “pas” cet écart.

Exercice 6 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x)=-3x+2$.

1. Dire si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   $A(1;-1)$ $B(-3;11)$ $C(2;4)$ $D(-5;17)$ $E(-2;-8)$ $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.
3. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x)=3x^2-2x+1$.

1. Dire si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   $A(1;2)$ $B(-3;34)$ $C(2;4)$ $D(5;66)$ $E(-2;16)$ $F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$
2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x)=2x^2-x$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

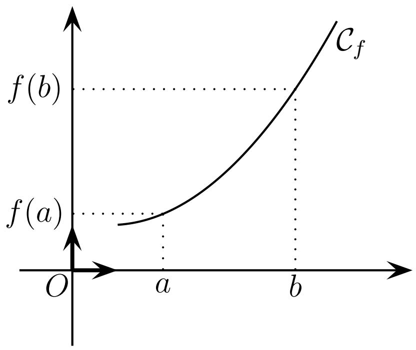
2. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Donner, à partir de ce graphique, le tableau de variation de la fonction f.
   Quel est le minimum de la fonction f ?
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice, et chercher alors une valeur plus précise pour ce minimum.

III Sens de variation des fonctions

1 Définition

Définition: *On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I lorsqu'elle conserve (respectivement inverse) l'ordre sur cet intervalle.*

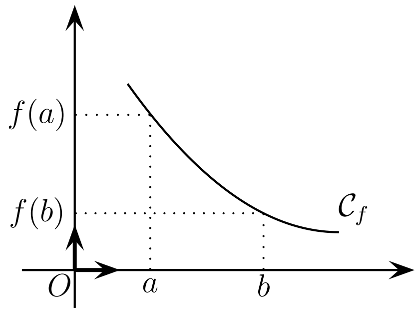
Cela signifie que, pour tous nombres a et b de I, si $a<b$ alors, $f(a)\leq f(b)$ (respectivement $f(a)\geq f(b)$).



La fonction f est croissante :
pour tous a, b,

$$a < b \iff f(a) < f(b)$$

f conserve l'ordre



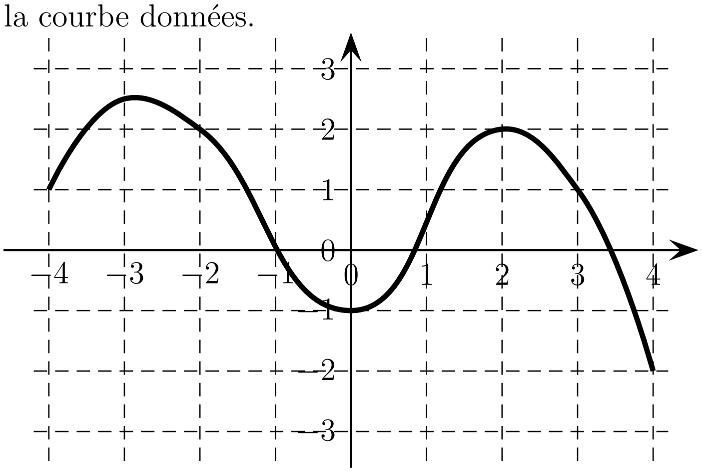
La fonction f est décroissante :
pour tous a, b

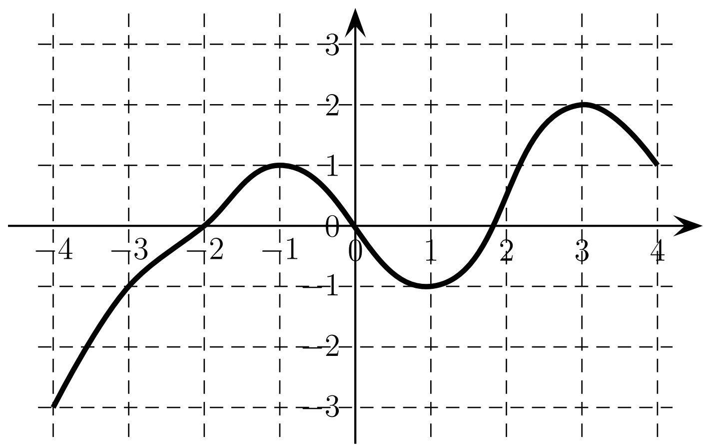
$$a < b \iff f(a) > f(b)$$

f inverse l'ordre

Exemple: *Soit la fonction affine f définie par : $f(x) = 3x + 2$*
Soit (a, b) un couple d'éléments de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors $3a < 3b$, et donc $3a + 2 < 3b + 2$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$. Donc, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Dresser dans les deux cas suivant le tableau de variation de la fonction f représentée par la courbe données.





Résoudre graphiquement dans chaque cas :
a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -3$ d) $f(x) > 1$ e) $f(x) \geqslant 0$ f) $f(x) \leqslant -1$

Exercice 10 On considère une fonction f dont on connaît le tableau de variation ci-contre. Indiquer, en le justifiant, pour chaque affirmation suivante si elle est vraie, fausse, ou si on ne peut pas savoir.

x	-10		-3		2		8
f	-5	↗	2	↘	0	↗	25

a) $f(3) < f(6)$ b) $f(-2) < f(0)$ c) $f(-2,5) < f(2,5)$ d) Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$

2 Ordre et fonctions de référence

Propriété: *Transitivité des inégalités*
Si $a < b$ *et* $b < c$*, alors* $a < c$*.*

Exemple: $-1 < 0$ *et* $0 < 3$*, donc* $-1 < 3$ *;* $\sqrt{2} < 2$ *et* $\pi > 2$*, donc* $\sqrt{2} < \pi$ *;*
$\dfrac{2}{3} < 1$ *et* $\dfrac{12}{11} > 1$*, donc* $\dfrac{2}{3} < \dfrac{12}{11}$
Comparer $\dfrac{1234}{1235}$ *et* $\dfrac{45\,627}{45\,626}$.

Propriété: *Addition d'inégalités*
Si $a < b$
et $c < d$ *alors* $a + c < b + d$*.*

Propriété: *Multiplication d'inégalités positives*

Si $0 < a < b$ *et* $0 < c < d$ *alors* $ac < bd$*.*

Exemple: • $3 < 5$ *et* $\pi < 4$*, donc* $3\pi < 20$ • $-4 < 5$ *et* $-2 < -1$*, mais* $8 > -5$

Propriété: *Ajout d'un nombre*
Si $a < b$ *alors* $a + c < b + c$

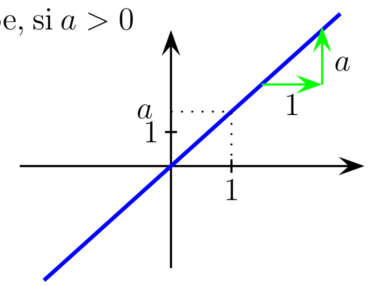
Exemple: $3 < 17$ *donc* $6 = 3 + 3 < 17 + 3 = 20$.
$x - 3 < 6$ *donc* $x < 9$ *en ajoutant 3.*
$6x + 7 > 0$ *donc* $6x > -7$ *en ajoutant* -7 *(ou soustrayant 7).*

Définition: *Une fonction linéaire est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme* $f(x) = ax$*, avec* a *un nombre réel.*

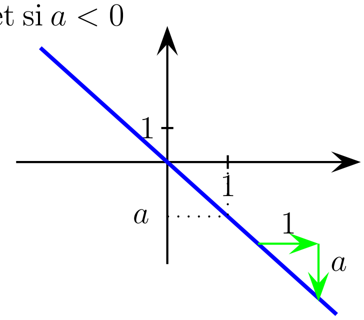
Tableau de valeurs :

x	0	1
$f(x)$	0	a

et sa courbe, si $a > 0$



et si $a < 0$



Le coefficient a s'appelle
le **coefficient directeur** de la droite.

Propriété: *Multiplication d'une inégalité par un nombre*
Soit $a < b$*, alors*

- *Si* $c > 0$ *alors* $ac < bc$
- *Si* $c < 0$ *alors* $ac > bc$

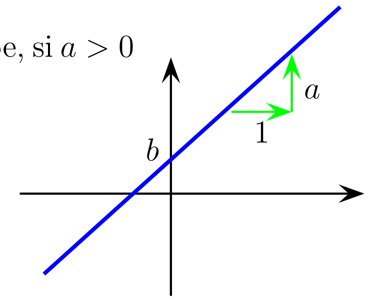
Exemple: $2 < 3$ *alors* $2 \times 2 < 3 \times 2$ *mais* $-2 > -3$

Définition: *Une fonction affine est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, avec a et b deux nombres réels.*

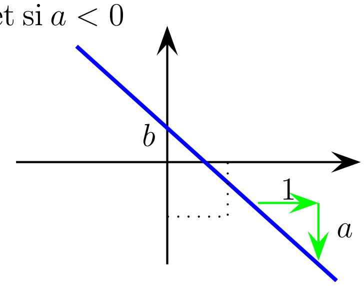
Tableau de valeurs :

x	0	1
$f(x)$	b	$a+b$

et sa courbe, si $a > 0$



et si $a < 0$



Le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.

Le coefficient b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

Exemple: $f(x) = 3x + 2$, $f(x) = \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ *sont affines.*

$f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ *et* $f(x) = 5 - 2x^2$ *ne sont pas affines.*

Représentation graphique : La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

Exercice 11

Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -2x + 3$.

Exercice 12

Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x + 1$.

Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Exercice 13

On considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = -2x - 2$ et $y = x + 2$.

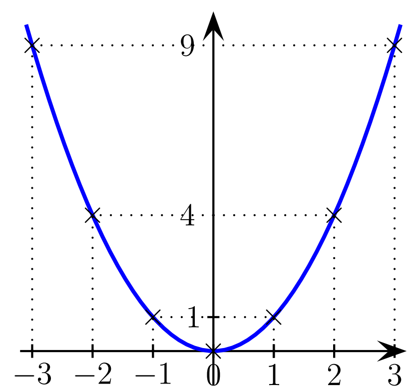
Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Définition: *La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^2$.*

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

et sa courbe :



La courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**.

Propriété: *Comparaison des carrés*

- *Si $a > 0$, $b > 0$ et $a < b$ alors $a^2 < b^2$.*
- *Si $a < 0$, $b < 0$ et $a < b$, alors $a^2 > b^2$.*

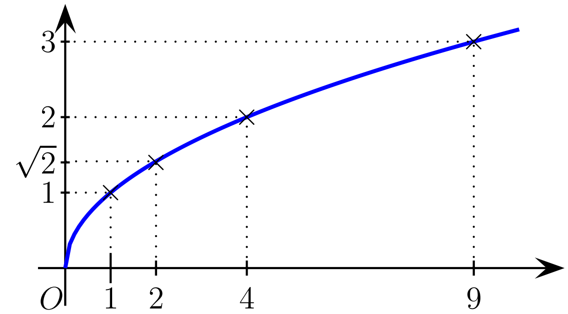
Exemple: • $3 < 5$ *donc* $3^2 < 5^2$ • $2 < \pi$ *donc* $2^2 < \pi^2$ • $-5 < -3$ *mais* $(-5)^2 > (-3)^2$

Définition: *La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \sqrt{x}$.*

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	4	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	9

et sa courbe :



Propriété: *Comparaison des racines carrées*
Pour $a > 0$ et $b > 0$, si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

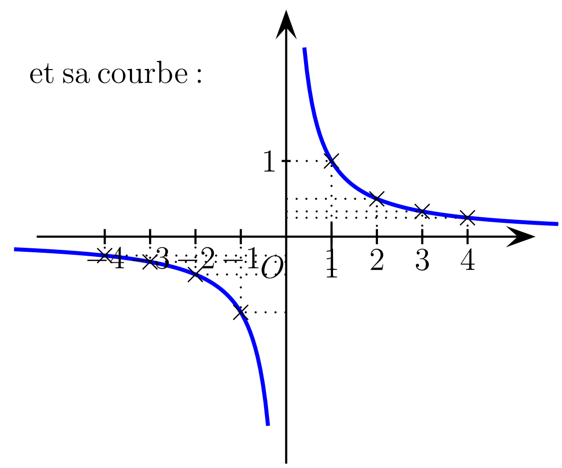
Démonstration : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0$

Définition: *La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1		1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$

et sa courbe :



Propriété: *Comparaison des inverses*
Si a et b sont de même signe, et $a < b$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Démonstration : $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b - a}{ab} > 0$.

Exemple:
- $2 < \pi$ *donc* $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{\pi}$
- $-3 < 2$ *mais* $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$

Propriété: *Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$. Si $a > 1$ alors, $a^3 > a^2 > a$.*

Synthèse : Lorsqu'on applique une fonction à une inégalité, l'odre est conseré si la fonction est croissante, l'ordre est inversé si elle est décroissante :
— f croissante alors $a < b \iff f(a) < f(b)$
— f décroissante alors $a < b \iff f(a) > f(b)$

En pratique, on change (ou inverse) l'ordre pour 3 opérations :
— mulitplication par un nombre négatif
— on élève au carré des nombres négatifs
— on prend l'inverse de nombres de même signe

3 Étude du sens de variation de fonctions

• Soit la fonction affine f définie par $f(x) = -2x + 3$.
Soit (a, b) un couple de nombres réels tel que $a < b$. Alors $-3a > -3b$, et donc $-3a + 2 > -3b + 2$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.
Donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Soit la fonction g définie par $g(x) = 3x^2 - 2$. Montrer que g est décroissante sur $[-10; 0]$, et croissante sur $[0; 10]$.

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	-10		0		$+10$
$f(x)$	298	$\searrow$	-2	$\nearrow$	298

Définition: *On dit qu'une fonction f est monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle : elle ne change pas de sens de variation sur cet intervalle.*

Exemple: *La fonction g précédente est monotone sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.*
Par contre, g n'est pas monotone sur $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Exercice 14 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = -3x + 2$.
Déterminer le sens de variation de f, puis donner son tableau de variation.

Exercice 15 Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = 3x^2 - 2$.
Déterminer le sens de variation de g sur les intervalles $[-10; 0]$ et $[0; 10]$.
Donner alors le tableau de variation de la fonction g.

IV Maximum et minimum d'une fonction

Définition: *On appelle maximum de f, lorsqu'il existe, le nombre $f(a)$ tel que : pour tout nombre réel x de E, $f(x) \leq f(a)$.*
On appelle minimum de f, lorsqu'il existe, le nombre $f(b)$ tel que : pour tout nombre réel x de E, $f(x) \geq f(b)$.

Illustration ...

Propriété: *Si une fonction f est croissante sur l'intervalle $[a; b]$, et décroissante sur l'intervalle $[b; c]$, alors elle admet sur l'intervalle $[a; c]$ un maximum, atteint en $x = b$ et égal à $f(b)$.*

x	a		b		c
f		$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	

Demonstration : f est croissante sur $[a; b]$, donc pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) \leq f(b)$.
De même, f est décroissante sur $[b; c]$, donc pour tout $x \in [b; c]$, on a $f(x) \leq f(b)$.
Finalement, $f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a; c]$.

Propriété: *Si une fonction f est décroissante sur l'intervalle $[a; b]$, et croissante sur l'intervalle $[b; c]$, alors elle admet sur l'intervalle $[a; c]$ un minimum atteint pour $x = b$ et égal à $f(b)$.*

x	a		b		c
f		$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	

Exercice 16 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = (x - 2)^2 + 3$.

1. Etudier le sens de variation de g sur les intervalles $[-10; 2]$ et $[2; 10]$.
   Donner le tableau de variation de g.
2. Déterminer le minimum de g.

Exercice 17 Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[4; 13]$ par l'expression $\dfrac{1}{x-3}$.
Déterminer le sens de variation de h, puis donner le maximum et le minimum de h.

Exercice 18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 3(x - 2)^2 + 3$.

1. Etudier les sens de variation de f sur les intervalles $]-\infty;2]$ et sur $[2;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.
2. Donner alors les maxima ou minima éventuels de f.

V Ensemble de définition d'une fonction

1 Définition

Définition: *On appelle ensemble de définition de la fonction f l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x dans le calcul de $f(x)$.*

Exemple: *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;6]$ par l'expression $f(x) = 3x^2 - 1$.*
L'ensemble de définition de f est $[-1;6]$; pour tout nombre x de $[-1;6]$ le nombre $f(x)$ existe.

Exemple: *Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \frac{1}{x}$.*
Pour pouvoir calculer $g(x)$, le nombre x ne doit pas être égal à zéro.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemple: *Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$.*
Pour pouvoir calculer $h(x)$, le nombre x ne doit pas être négatif.
L'ensemble de définition de h est donc $]0;+\infty[$.

Exercice 19 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

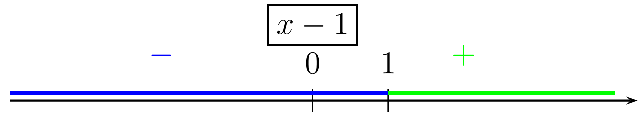
$$f : x \mapsto \frac{1}{x+3} \;;\quad g : x \mapsto \frac{1}{x^2-9} \;;\quad h : x \mapsto \frac{1}{x^2-x} \;;\quad j : x \mapsto \frac{1}{(x-3)(x+7)}$$

$$k : x \mapsto \sqrt{x-2} \;;\quad l : x \mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{x-2} \;;\quad m : x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)}$$

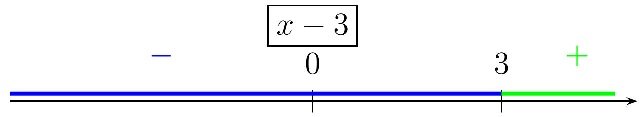
2 Tableau de signes

Exemple: *Déterminer le signe de l'expression* $A(x) = (x-1)(x-5)$.

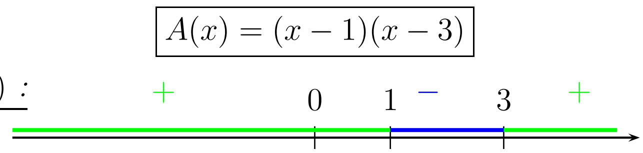
Signe de $x-1$ *:* $x-1<0$ *pour* $x<1$
$x-1>0$ *pour* $x>1$



Signe de $x-3$ *:* $x-3<0$ *pour* $x<3$
$x-3>0$ *pour* $x>3$



Signe du produit $A(x) = (x-1)(x-3)$ *:*



On présente ces calculs et résultats dans un tableau :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 20 Déterminer le signe des expressions suivantes :

$A(x) = (x-5)(x-12)$ $\quad$ $B(x) = (x-3)(2x+5)$

$C(x) = (x+6)(2x-8)(3x-9)$ $\quad$ $D(x) = (x-3)(-2x+6)$

$E(x) = \dfrac{x+6}{2x-16}$ $\quad$ $F(x) = \dfrac{2x-3}{-2x+6}$

$G(x) = (2x+3)(x-5) - (3x+5)(x-5)$ $\quad$ $H(x) = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{x-3}$

Exercice 21 Résoudre les inéquations suivantes :

(I_1) : $-3x+2 < 2x+3$ $\quad$ (I_2) : $(3x-1)(x+2) \leqslant x(x+2)$ $\quad$ (I_3) : $2x^2 > 3x$

(I_4) : $\dfrac{1}{4x-3} \leqslant \dfrac{2}{3x-4}$ $\quad$ (I_5) : $\dfrac{2}{x+3} \geqslant 4$

Exercice 22 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions :

$f(x) = \sqrt{(x-3)(-x+2)}$; $g(x) = \sqrt{(x-3)(-x+2)+(x-3)(-4x+3)}$; $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)(2x-1)}$

VI Quelques fonctions mises en situation

Exercice 23 Dans une entreprise, pour x objets produits et vendus, le bénéfice est de :

$$B(x) = -2x^2 - 500x + 70\,000\,.$$

1. Montrer que pour tout x réel, $B(x) = (2x+700)(-x+100)$.

2. Pour quels nombres d'objets x, l'entreprise est-elle rentable ?

Exercice 24 Dans une entreprise, la recette, en euros, obtenu pour la vente journalière de x objets est donnée par la fonction f définie sur $[0;50]$ par l'expression :

$$f(x) = -x^2 + 52x - 480\,.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0;50]$, $\quad f(x) = -(x-26)^2 + 196$.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[0;26]$ puis sur $[26;50]$.

c) En déduire le bénéfice maximum que l'entreprise peut réaliser et la quantité d'objets à vendre pour l'atteindre.

Exercice 25 Un projectile est lancé en l'air à un instant initial de date $t = 0$.
On établit que son altitude (en mètres) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 4t + 1$.

1. a) A quelle altitude le projectile a-t-il été lancé ?
   b) Quelle est l'altitude du projectile après une demie seconde ?
2. a) Montrer que pour tout nombre réel t, $h(t) = -(t-1)(5t+1)$
   b) En déduire à quel instant le projectile touchera le sol.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel t, $h(t) = -5\left(t - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{9}{5}$.
   b) A l'aide de l'expression précédente, étudier les variation de h sur $\left]-\infty;\dfrac{4}{5}\right]$ et sur $\left[\dfrac{4}{5};+\infty\right[$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction h.
   c) Déduire de ce qui précède la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Exercice 26 **Choisir une forme adaptée**
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;5]$ par : $f(x) = (3x-5)^2 - 4x^2$.

1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) Développer l'expression de $f(x)$.
2. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :
   a) Quelle est l'ordonnée du point C de la courbe représentative de f qui a pour abscisse $\sqrt{2}$?
   b) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les axes du repère ?
   c) résoudre l'équation $f(x) = 25$.

Exemple: Utiliser le vocabulaire des fonctions

On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

- *son ensemble de définition est $D = [-5;4]$;*
- *les nombres -4 et 4 ont la même image 3 ;*
- *les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;*
- *le nombre -5 est un antécédent de 0 par f ;*
- *$f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0,5$.*

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

Exemple: Choisir une forme adaptée

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;5]$ par :

$$f(x) = (3x-5)^2 - 4x^2 \ .$$

1. a) *Factoriser l'expression de $f(x)$.*

   b) *Développer l'expression de $f(x)$.*

2. *Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :*

   a) *Quelle est l'ordonnée du point C de la courbe représentative de f qui a pour abscisse $\sqrt{2}$?*

   b) *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les axes du repère ?*

   c) *résoudre l'équation $f(x) = 25$.*