Devoir de mathématiques

Exercice 1

1. Donner le signe de $P(x) = -x^2 + x - 1$ en fonction de x.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 2}$.

   On admet que pour tout entier n, $u_n > -2$.

   a) Calculer les valeurs des premiers termes u_1 et u_2.

   b) Montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{P(u_n)}{u_n + 2}$.
   En déduire que, pour tout entier n, $u_{n+1} < u_n$.
3. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$, de telle manière que, pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans un repère orthonormal. *On prendra comme unité 10cm.*

   c) Construire sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u_1, u_2, u_3 et $u4$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = 3x(x - 1) + 1$.
On note de plus $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

1. Donner le tableau de variation de f.
2. Déterminer les coordonnés des éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
3. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal. *On prendra 1 unité = 10 cm.*
4. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0,1$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Construire sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite, u_0, u_1, u_2, ..., u_5.