Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. $P(x) = -x^2 + x - 1$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -3 < 0$ et n'admet donc aucune racine réelle.
   On a donc $P(x) < 0$ pour tout x réel.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 2}$.

   a) $u_1 = \dfrac{3u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{2}{3}$, $u_2 = \dfrac{3u_1 - 1}{u_1 + 2} = \dfrac{1}{\frac{2}{3} + 2} = \dfrac{3}{8}$

   b) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n - 1}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{3u_n - 1}{u_n + 2} - \frac{u_n\left(u_n + 2\right)}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{P\left(u_n\right)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

   Or $P\left(u_n\right) < 0$ d'après la question 1., et, comme $u_n > -2$, on a $u_n + 2 > 0$.
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite est décroissante.

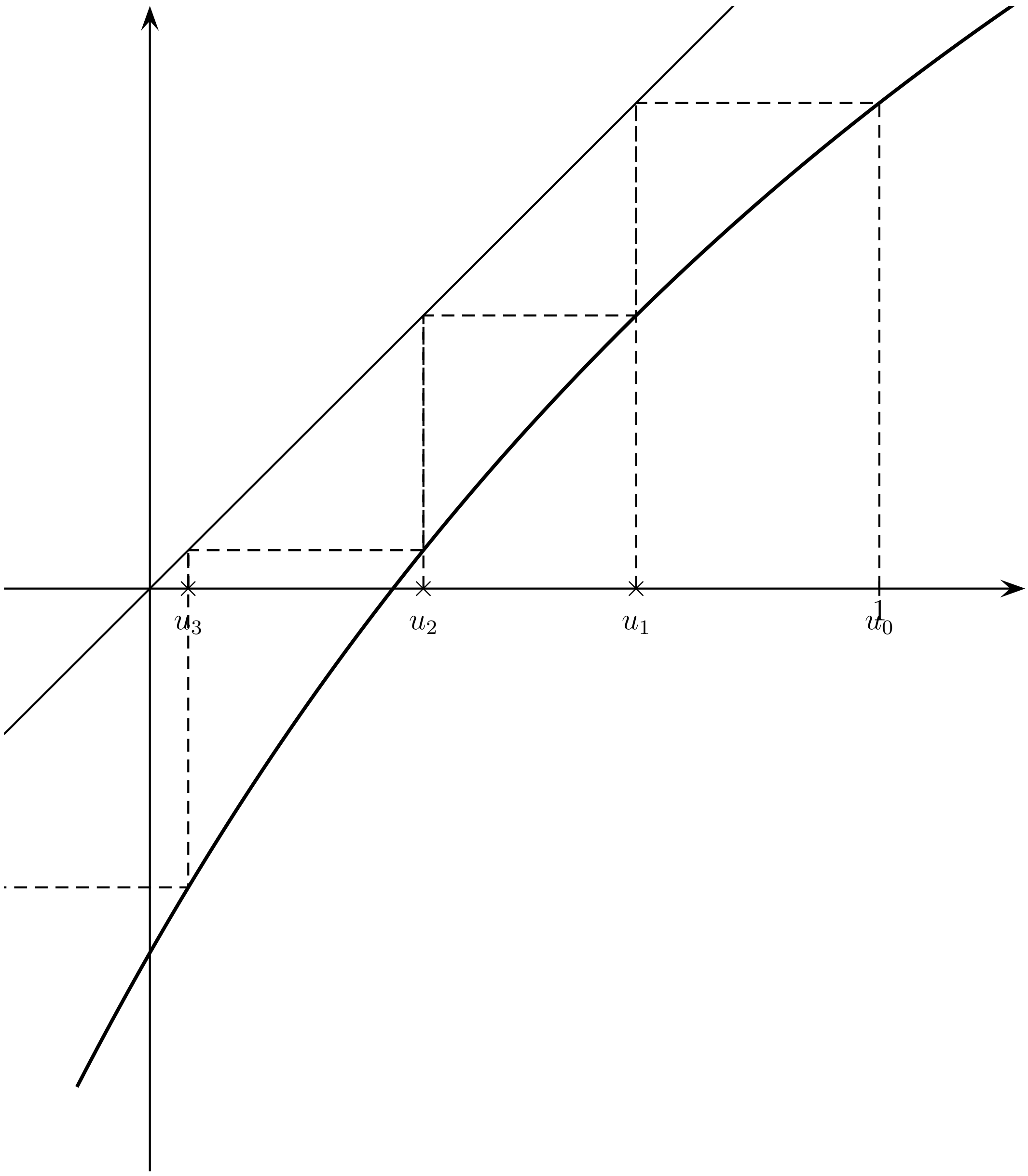
3. a) On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x - 1$, donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = x + 2$ donc $v'(x) = 1$, et alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3 \times (x + 2) - (3x - 1) \times 1}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{7}{(x + 2)^2} \end{aligned}$$

   On obtient donc le tableau de variation

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
7	$+$
$(x+2)^2$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

b) et c)



Exercice 2

1. f est une fonction du second degré, avec $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, avec $a = 3 > 0$ et $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$, donc, f est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   Le minimum de f est de plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \times \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{4}$.
2. Soit $M(x;y)$ un éventuel point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$, alors, $M \in \mathcal{D} \iff y = x$ et, $M \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$.
   On doit donc avoir $y = x = f(x)$, soit en particulier $x = f(x) = 3x(x-1)+1 \iff 3x^2-4x+1 = 0$.
   On peut calculer le discriminant, ou s'apercevoir que ce trinôme admet 1 comme racine évidente, et donc trouver que les racines de cette équation sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

   Ainsi, il y a deux points d'intersection : $A(1;1)$ et $B\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

3.