Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 a) $z_1 = (-2+3i)^2 = (-2)^2 + 2(-2)(3i) + (3i)^2 = -5 - 12i$
b) $z_2 = (-2+3i)(4-5i) = 7 + 22i$
c) $z_3 = \dfrac{2+i}{3-2i} = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{4+7i}{13} = \dfrac{4}{13} + i\dfrac{7}{13}$
d) $z_4 = \dfrac{-2+3i}{-1+i} = \dfrac{(-2+3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \dfrac{5-i}{2} = \dfrac{5}{2} - i\dfrac{1}{2}$

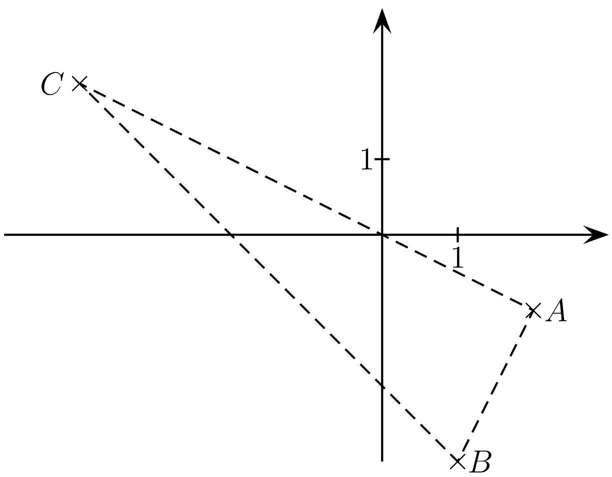
Exercice 2
a) Graphiquement, on trouve directement que $|z_1| = 3$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et donc $\arg(z_2) = \theta_2$ tel que $\cos\theta_2 = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{3}$, et alors $z_2 = 2\left(\cos -\dfrac{\pi}{3} + i\sin -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) $|z_3| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et donc $\arg(z_3) = \theta_3$ tel que $\cos\theta_3 = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de même $\sin\theta_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta_3 = \dfrac{3\pi}{4}$, et alors $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Exercice 3 a) $(3+5i)z + 4 = 1 + i \iff z = \dfrac{-3+i}{3+5i} = \dfrac{-4+18i}{34} = -\dfrac{2}{17} + i\dfrac{9}{17}$
b) $z^2 + 2z + 5 = 0$ est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 5 = -16 < 0$ et qui admet donc deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-2 - i\sqrt{16}}{2} = -1 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{-2 + i\sqrt{16}}{2} = -1 + 2i$

Exercice 4
a)



b) $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{5}$
$BC = \sqrt{(-4-1)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{3}$

c) Comme $BC^2 = 50 = AB^2 + AC^2$ on en déduit, d'après le théorème de Pyhtagore, que ABC est un triangle rectangle en A.