I - Trinôme du second degré

1) Equations du second degré

Définition *On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels quelconques, et $a \neq 0$.*

Exemple : de trinômes du second degré :

Trinômes	$a =$	$b =$	$c =$
$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$	$a = 3$	$b = 2$	$c = -5$
$Q(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \dfrac{2}{3}$	$a = \sqrt{2}$	$b = -3$	$c = \dfrac{2}{3}$
$R(x) = -x^2 + \dfrac{5}{2}x$	$a = -1$	$b = \dfrac{5}{2}$	$c = 0$
$S(x) = 3x^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right) x - \pi$	$a = 3$	$b = -\left(1 - \sqrt{2}\right)$	$c = -\pi$
$T(x) = \dfrac{6}{5}x^2 - 3$	$a = \dfrac{6}{5}$	$b = 0$	$c = -3$
$U(x) = (x-2)^2 + 3(x+3)$	$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$

Définition *On appelle* **discriminant** *du trinôme du second degré ax^2+bx+c, noté Δ, le nombre :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

.

Exemple : de discriminant de trinômes du second degré :

Trinômes	$a =$	$b =$	$c =$	$\Delta =$
$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$	$a = 3$	$b = 2$	$c = -5$	$\Delta = 64$
$Q(x) = x^2 + 2x + 1$	$a = 1$	$b = 2$	$c = 1$	$\Delta = 0$
$R(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 5$	$a = 1$	$b = \sqrt{2}$	$c = -5$	$\Delta = 22$

Propriété

- *Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet deux solutions distinctes (aussi appelées* **racines***) :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet une unique solution (ou* **racines***) double :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.*

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 1 = 0$ c) $x^2 + 1 = 0$

d) $4x^2 + 8x - 5 = 0$ e) $3x^2 + x + 6 = 0$ f) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$

g) $2x^2 - x - 4 = x^2 + 8$ h) $x(x-1) = -2(3x+7)$ i) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

2) Signe d'un trinôme du second degré

Propriété *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Alors :*

- *Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	0	*Signe de $-a$*	0	*Signe de de a*	

- *Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	0	*Signe de a*	

- *Si $\Delta < 0$, le trinôme $f(x)$ n'a pas de racine et*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	

Exercice 2 Etudier le signe de :

a) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $Q(x) = x^2 - 1$ c) $R(x) = x^2 + 1$

d) $S(x) = 3x^2 - 5x + 2$ e) $T(x) = 2x^2 + x + 3$ f) $U(x) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

Exercice 3 Résoudre les inéquations :

a) $x^2 - 2x + 1 > 0$ b) $-3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0$ c) $x^2 - 4x - 4 \geqslant 0$

d) $-2x^2 + 5x \leqslant 2$ e) $3x^2 \geqslant 2x - 1$ f) $x(2x-5) \geqslant x - 6$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x(2x-5) = x + 6$ b) $(2x-3)(2x+3) - (2x-1)(x+2) = 0$

c) $\frac{x-5}{5} = \frac{2}{x-2}$ d) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{x+3}$ e) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-9} = 1$

Exercice 5 Etudier le signe de :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$ b) $g(x) = -x^2 + x - 3$ c) $h(x) = x - \frac{1}{x}$

d) $k(x) = x - 3 + \frac{2}{x}$ e) $l(x) = 2x + \frac{4}{x-3}$

Exercice 6 *(Equations bicarrées)*
En effectuant le changement de variable $X = x^2$, résoudre les équations :

d) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ e) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 6 = 0$

3) Exercices

Exercice 7 Déterminer les points d'intersection (s'ils existent) de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$:

a) $\mathcal{P} : y = x^2 - 3x + 1$ et $\mathcal{D} : y = -2x + 1$ b) $\mathcal{P} : y = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 4$ et $\mathcal{D} : y = 3x - 6$

c) $\mathcal{P} : y = x^2 - 3x + 1$ et $\mathcal{D} : y = -2x + 1$ d) $\mathcal{P} : y = -x^2 + x + 2$ et $\mathcal{D} : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

Exercice 8 Déterminer la position relative des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

a) $\mathcal{P} : y = x^2 - x + 2$ et $\mathcal{P}' : y = -x^2 + 2x - 6$

b) $\mathcal{P} : y = -2x^2 - 3x + 2$ et $\mathcal{P}' : y = x^2 + x + 1$

c) $\mathcal{P} : y = 2x^2 - 3x - 4$ et $\mathcal{P}' : y = 2x^2 + 6x + 5$

Exercice 9 Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2 + (m-1)x + 1 = 0$.

a) Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.

b) Préciser les cas, en fonction de m, où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Exercice 10 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = x + m$.

1. Tracer dans un repère orthogonal la parabole $\mathcal{P}$ et les droites $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_{-2}$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$.
2. Pour quelles valeurs de m, la droite $\mathcal{D}_m$ coupe-t-elle $\mathcal{P}$ en deux points distincts A_1 et A_2 ?
3. Calculer, en fonction de m, les coordonnées des points A_1 et A_2, puis du point I_m milieu de $[A_1A_2]$.
   Que peut-on dire des abscisses des points I_m ?
   En déduire que I_m appartient à une demi-droite que l'on précisera.

Exercice 11 Soit P le trinôme défini par $P(x) = 3x^2 + (a-1)x + (a+8)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a, P admet-il une racine double ? Calculer cette racine.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le nombre 2 est-il racine de P ? Calculer alors l'autre racine.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a, P n'a-t-il aucune racine réelle ?

Exercice 12 La vitesse moyenne d'un avion de tourisme est de 250 km/h. Cet avion effectue le vol aller et retour Paris-Lyon. La distance entre ces deux villes est de 400 km.

A l'aller, il bénéficie d'un vent favorable d'une vitesse de x km/h. Au retour, il est freiné par ce même vent, et met donc 40 minutes de plus qu'à l'aller.

1. Compte tenu du vent, quelle est la vitesse de l'avion à l'aller ? Quelle est la durée du trajet aller ?
2. Compte tenu du vent, quelle est la vitesse de l'avion au retour ?Quelle est la durée du trajet retour ?
3. Ecrire une équation reliant le temps aller et le temps retour.
4. Résoudre cette équation et donner la vitesse du vent.

Exercice 13 Le périmètre d'un rectangle mesure 12 cm.

1. Soit x la longueur, en cm, de ce rectangle. Dans quel intervalle varie x ?
2. Quelle est la mesure de la largeur en fonction de x ?
3. Calculer l'aire de ce rectangle en fonction de x.
4. On souhaite que l'aire de ce rectangle soit supérieure à 5 cm^2.
   Quelle inéquation doit-on résoudre ?
   Résoudre alors cette inéquation et en déduire quelles dimensions donner à la longueur.

Définition *Un* **polynôme** *est une expression de la forme :*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx + e$$

avec a, b ,c, d et e des nombres réels quelconques, et n un entier naturel.
L'entier n est le **degré** *du polynôme.*

Exemple :

- $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 3$ est un polynôme de degré 4.
- $Q(x) = 5x^7 - 3x^2 + 4$ est un polynôme de degré 7.
- $R(x) = x^2 + x + 1$ est un polynôme (trinôme) de degré 2.

Théorème *(Propriété fondamentale des polynômes)*
Soit $P(x)$ un polynôme de degré n et a une racine de P (c'es-à-dire que $P(a) = 0$).
Alors, $P(x)$ se factorise par $(x - a)$: il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Exemple : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
Montrer que 2 est une racine de P, puis factoriser P.
Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

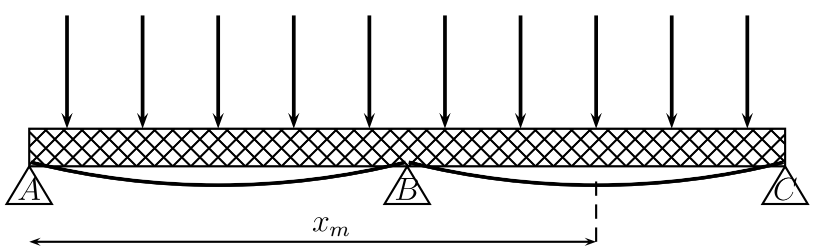
Corollaire *Si le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors il se factorise selon $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.*

Exercice 14 Factoriser les trinômes
a) $P(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$ c) $R(x) = -3x^2 - 2x + 1$

Exercice 15 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$.
Montrer que -1 est une racine de P est factoriser P.

Exercice 16 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.
Montrer que -2 est une racine de P, puis factoriser P.
Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$, puis dresser le tableau de signe de $P(x)$.

Exercice 17 *Déformation d'une poutre*
Une poutre de longueur 2 mètres repose sur trois appuis simples A, B et C, l'appui B étant situé au milieu de $[AC]$.
Elle supporte une charge uniformément répartie de 1 000 N.m^{-1} (newtons par mètre). Sous l'action de cette charge, la poutre se déforme.



On démontre que le point situé entre B et C où la déformation (la flèche) est maximum, a une abscisse x_m qui est solution de l'équation :

$$32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = 0\,.$$

1. Vérifier que 1 est solution de cette équation.
2. Factoriser alors l'équation et la résoudre.
3. En déduire x_m, position de la section de poutre de flèche maximum entre les points B et C.