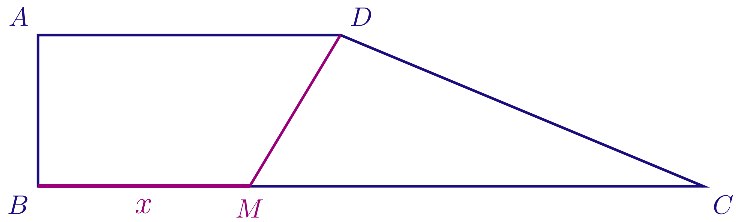
Fonctions - $1^{\text{ère}}$ partie - Exercices

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = 2x^2 - 3$.

1. Donner les images de 3 ; 5 ; 0 ; -1 et -3.
2. Quels sont les antécédents de 1 ?

Exercice 2 $ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 10$ et $BC = 22$. M est un point du segment $[BC]$.



On pose $x = BM$. Soit f la fonction telle que $f(x) = DM$.
On ne cherche pas ici à donner l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction f en fonction de x.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Déterminer $f(0)$, $f(10)$ et $f(22)$.
3. Détailler comment varie $f(x)$ lorsque x augmente.
   Représenter graphiquement ces détails à l'aide d'un graphique et/ou d'un tableau représentant les variations.
4. 7 a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 11$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x - 11)(x - 1)$.
2. Déterminer l'image de 3 par la fonction f.
   Déterminer de même l'image de -2 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.
   Déterminer de même les antécédents éventuels de 11 par f.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2(x + 2)(x - 5)$.
2. Déterminer l'image de -2 par la fonction f.
   Déterminer de même l'image de -3 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -20 par f.
   Déterminer de même les antécédents éventuels de 0 par f.

Exercice 5 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0; 2)$; $B(1; 1)$; $C(-2; 4)$; $D(-3; 29)$; $E(10; 172)$; $F(125; 30\,877)$.
Placer ces points dans un repère et tracer une courbe $\mathcal{C}_f$ possible.

Exercice 6 Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \dfrac{x+6}{x-2}$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0; -3)$; $B(1; -7)$; $C(-1; -2,5)$; $D(2; 8)$; $E(-2; -1)$; $F(6; 3)$; $G(3; 10)$; $H(4; 5)$
Placer ces points dans un repère et tracer une courbe $\mathcal{C}_g$ possible.

Exercice 7 Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = 2x - 3$.
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_g$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur. . .) et donner le tableau de variation correspondant.

Exercice 8 Soit h la fonction définie sur $[0; 15]$ par l'expression $h(x) = x^2 + 6x - 3$
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_h$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

Exercice 9 Soit k la fonction définie sur $[-4; 7]$ par l'expression $k(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_k$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

Exercice 10 On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$.

a) Quelle est la variation de f entre $x = 1$ et $x = 2$?

b) Quelle est la variation de f entre $x = 1$ et $x = 3$?

c) Quelle est la variation de f entre $x = 1$ et $x = 1.5$?

d) Comparer ces trois variations.

Exercice 11 On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ et la fonction cube, $g : x \mapsto x^3$, définies sur $\mathbb{R}$.
Calculer les taux de variation de f et de g, puis les comparer,

a) entre 0 et 1 b) entre 0 et 2 c) entre 0 et 4 d) entre -1 et 0 e) entre -2 et -1

Exercice 12 Tracer les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \mapsto 2x+1$, $f_2 : x \mapsto 2x-3$, $f_3 : x \mapsto 2x$ et $f_4 : x \mapsto -x+1$.
Donner pour chacune le tableau de variation et le tableau de signes.

Exercice 13 Soit les fonctions affines $f : x \mapsto 3x + 2$ et $g : x \mapsto -2x + 1$.

1. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère.
2. Donner les tableaux de variations et de signes de f et g.
3. Calculer les taux de variation de f et g : a) entre 0 et 1 b) entre 0 et 5 c) entre -1 et 1

Exercice 14 Déterminer l'équation de la droite (AB) avec $A(2; -1)$ et $B(6; 7)$.
Tracer alors cette droite.

Exercice 15 Déterminer l'expression de la fonction affine dont la courbe passe par les points $A(-2; -2)$ et $B(1; 7)$.

Exercice 16 Donner les tableaux de signes des expressions affines :

a) $3x + 6$ b) $2x + 8$ c) $-2x + 4$ d) $-6x - 3$ e) $x + 2$ f) $-x + 7$

g) $2x$ h) x i) $-x$ j) $3 - 6x$ k) $2 + 3x$ l) $-8 - 3x$

Exercice 17 En utilisant la règle des signes, donner les tableaux de signes des expressions suivantes :

a) $A(x) = (3x + 6)(2x + 8)$ b) $B(x) = (-2x + 4)(x + 3)$ c) $C(x) = (-6x - 3)(8 - 2x)$

d) $D(x) = 2x(x + 3)$ g) $E(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 5}$ h) $F(x) = \dfrac{2x + 1}{3 - x}$

Exercice 18 Après avoir factorisé ou mis sur le même dénominateur, donner les tableaux de signes de :

a) $A(x) = 3x(2x + 1) + 6(2x + 1)$ b) $B(x) = (x + 3)(x + 2) - (x + 2)(2x + 1)$

c) $C(x) = \dfrac{3}{2x + 1} + \dfrac{2}{x + 2}$ d) $D(x) = 2 + \dfrac{1}{x + 2}$ g) $E(x) = \dfrac{2x - 4}{x - 5} - 3$

h) $F(x) = \dfrac{2x + 1}{3 - x} + 2$ i) $G(x) = (x+2) - 3x(x+2)$ j) $H(x) = \dfrac{2}{4 - 2x} - 3$

Exercice 19 On cherche à résoudre l'équation $E : 2x^2 - 6 = 1$.
On introduit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 6$.

a) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ et résoudre approximativement l'équation E.

b) Résoudre algébriquement E, en isolant tout d'abord le terme x^2.

Exercice 20 On cherche à résoudre l'équation $E : 2x^3 - 6 = 1$.
On introduit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 6$.

a) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ et résoudre approximativement l'équation E.

b) Résoudre algébriquement E, en isolant tout d'abord le terme x^3.

Exercice 21 Résoudre les équations :

a) $x^2 = 7$	b) $x^2 = -3$	c) $3x^2 = 6$	d) $2x^2 + 4 = 8$	e) $3x^2 + 6 = 3$
f) $x^3 = 7$	g) $x^3 = -8$	h) $2x^3 + 3 = 7$	i) $-3x^3 = 9$	j) $2x^3+3 = x^3+2$

Exercice 22 Soit $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$ et $g(x) = 6x - 2$

a) Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_g$ et étudier graphiquement leur position relative.

b) Étudier précisément, algébriquement, leur position relative.

Exercice 23 Même exercice avec les fonctions

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -3x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 - 4$ et $g(x) = x^2 - x + 2$.
(montrer pour cela que, pour tout réel x, on a $(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + x - 6$)

Exercice 24 Résoudre les inéquations : $I_1 : (2x + 3)(x + 2) < (2x + 1)(2x + 3)$,
$I_2 : (-3x+1) < (-3x+1)(2x-5)$, $I_3 : (x+2)(2x-3) \geqslant (2x-3)$, $I_4 : \dfrac{1}{2x-3} < 2$, $I_5 : \dfrac{2}{3x+2} \leqslant \dfrac{3}{2x+3}$
$I_6 : \dfrac{x}{-2x+1} \geqslant \dfrac{2x}{-3x+1}$, $I_7 : 2 \leqslant \dfrac{5x+1}{3x+1}$, $I_8 : \dfrac{4}{2x+2} - \dfrac{3}{3x+3} \geqslant 1$