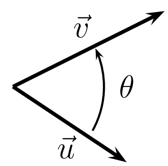
I - Expressions et propriétés du produit scalaire

1) Définitions

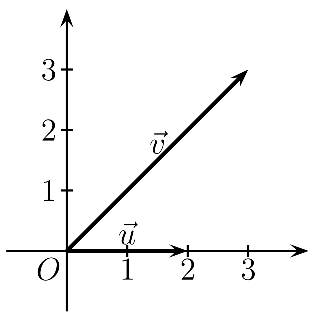
Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}{\cdot}\vec{v}$, est le nombre, $\vec{u}{\cdot}\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos(\vec{u}, \vec{v})$.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos\theta$$

Si A, B et C sont trois points du plan, alors : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$

Exemple :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 6$$

Propriétés

- *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.*
- *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.*
- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :*

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Attention : A la différence du produit entre nombres réels, on n'a pas $\vec{u}{\cdot}\vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ **!**

Définition et notation : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2$.
$\vec{u}^2$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$.

2) Propriétés du produit scalaire

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k :*

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$

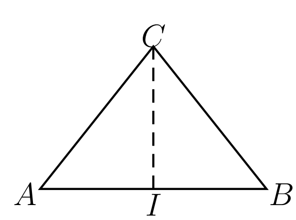
Exemples :

- $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - 3\vec{w}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \cdots$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \cdots$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \cdots$

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.

Calculer les produits scalaires : a) $\overrightarrow{AB}{\cdot}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}{\cdot}\overrightarrow{AI}$ c) $\overrightarrow{IA}{\cdot}\overrightarrow{BI}$

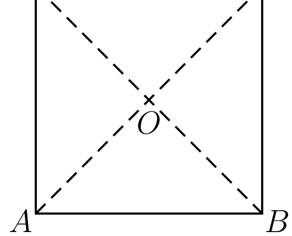


Exercice 2

$ABCD$ est un carré de côté 2 cm de centre O.

Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DC}$



Exercice 3

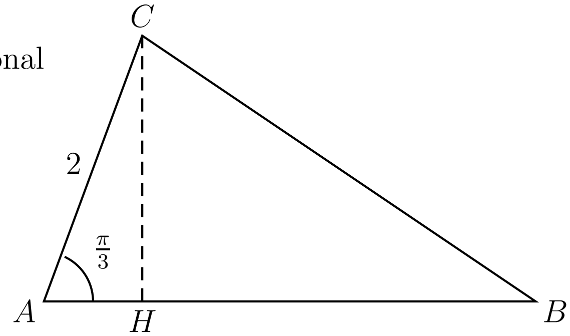
Dans le triangle ABC ci-contre, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

On donne de plus $AC=2$, $AB=4$, et $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$.

a) Calculer AH.

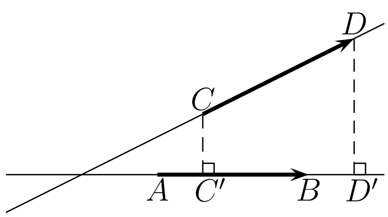
b) Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

c) Que remarque-t-on ?



3) Projection orthogonale

Propriété *Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs, et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB) ; alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.*

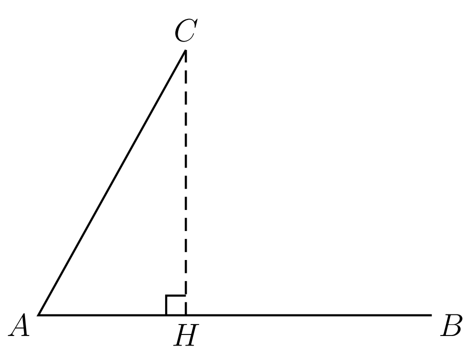


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

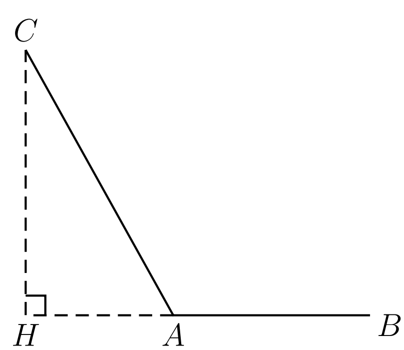
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$$

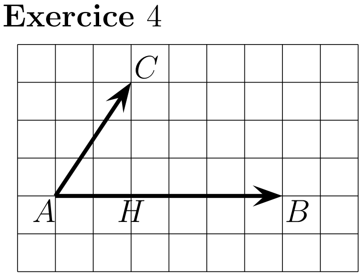


Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

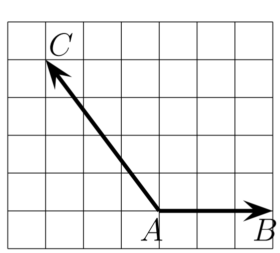
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$$



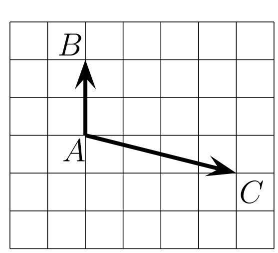
Exercice 4



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\ \dots$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\ \dots$

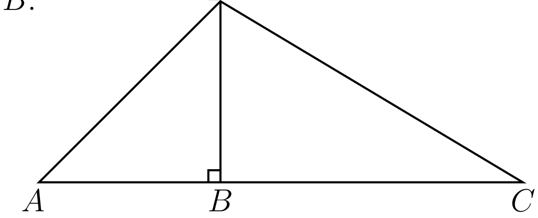


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\ \dots$

Exercice 5 ABD est un triangle rectangle isocèle en B.
L'angle $\widehat{BCD}$ mesure 30° et $AB = 3$.

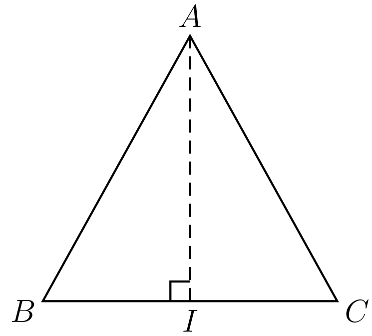
1. Calculer les longueurs AD, CD et BC.
2. Déterminer les produits scalaires suivants :

   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$



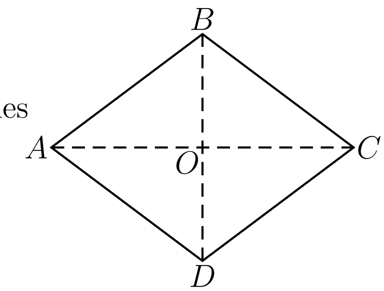
Exercice 6
ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $AB = 2,5$ cm et $BC = 3$ cm. I est le milieu de $[BC]$.

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ de deux manières différentes, et en déduire la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.



Exercice 7 $ABCD$ est un losange de centre O dont les diagonales mesurent $AC = 4$ cm et $DB = 3$ cm.

Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{DAC}$ à $0,1$ près.



4) Expression du produit scalaire à l'aide des normes uniquement

On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.
Or, $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et de même, $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Ainsi, $2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, et donc,

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\Big[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\Big]$.

Exercice 8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

5) Produit scalaire et coordonnées

Propriété *Soit dans un repère orhonormal* $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$ *les vecteurs* $\vec{u}(x;y)$ *et* $\vec{v}(x';y')$*, alors*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice 9 Dans un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants, et en déduire une valeur de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ à $0,1$ degré près.

a) $\vec{u}(1;-2)$ et $\vec{v}(6;5)$ b) $\vec{u}(-2;4)$ et $\vec{v}\left(3;\dfrac{1}{2}\right)$ c) $\vec{u}(\sqrt{2};-2)$ et $\vec{v}(\sqrt{2};1)$

Exercice 10 On se place dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Dans chacun des cas, déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
a) $\vec{u}\,(m;5)$ et $\vec{v}\,(1;-4)$ b) $\vec{u}\,(2m;1)$ et $\vec{v}\,(3;2)$ c) $\vec{u}\left(\dfrac{m}{2};2\right)$ et $\vec{v}\,(3;-1)$ d) $\vec{u}\,(m;3)$ et $\vec{v}\,(m;-4)$

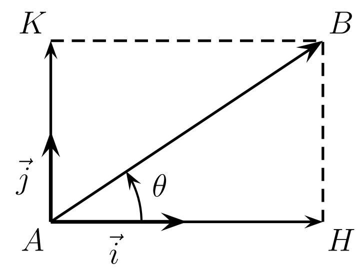
et $C(1;15)$.

Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

II - Décomposition d'un vecteur sur deux axes orthogonaux

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ selon les axes $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ (ou $(A;\vec{i})$, $(A,\vec{j})$) revient à projeter orthogonalement le point B sur chacun de ces deux axes.



On obtient $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$

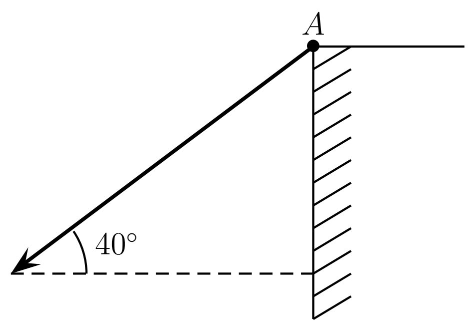
avec, $AH = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = AB\cos\theta$

et $\quad AK = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{j} = AB\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = AB\sin\theta$

En résumé, on a : $\quad \overrightarrow{AB} = \underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}\right)}_{=AH}\vec{i} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}\right)}_{=AK}\vec{j}$

Exercice 12 Une personne tire sur une corde attachée au sommet d'un mur vertical avec une force de 200 N suivant un angle de 40° avec l'horizontale.

Déterminer la décomposition de cette force sur des axes horizontaux et verticaux, et calculer l'intensité de chacune de ces forces.



III - Exercices

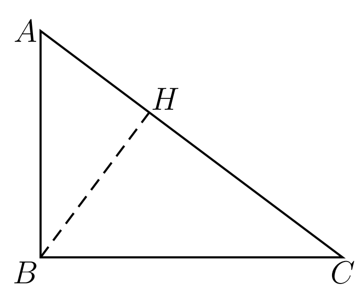
Exercice 13 Le plan est rapporté à un RON $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère les points $A(1;-1)$, $B(3;3)$, $C(-4;4)$, $D(2;1)$, $E(17;12)$ et $F(5;-12)$.

1. Montrer que $(AB)\perp(CD)$.
2. Montrer que $(AB)//(EF)$.

Exercice 14 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ cm et $BC = 4$ cm.
On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC).

Calculer la longueur AH
(on pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$).



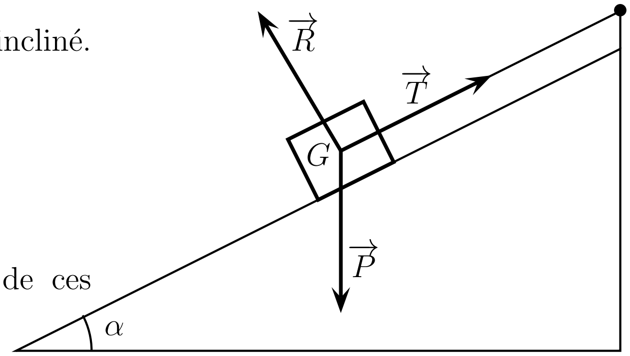
Exercice 15 Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(2;-1)$, $B(3;2)$ et $C(0;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

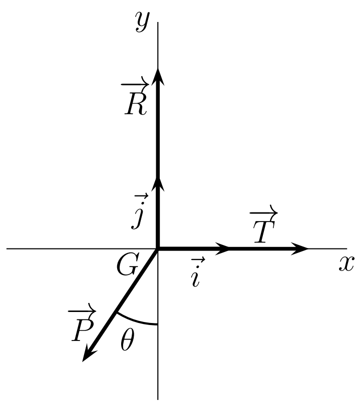
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
4. En déduire au degré près les angles du triangle ABC.

Exercice 16 Un solide est en équilibre sur un plan incliné.
Ce solide estsoumis à trois forces :
- son poids $\overrightarrow{P}$
- la réaction du support $\overrightarrow{R}$
- la tension de la corde $\overrightarrow{T}$

On sait de plus que $P = 20$ N et $\alpha = 30°$.
On cherche à déterminer l'intensité de chacune de ces forces.



On se place pour cela le repère orthonormal $\left(G;\vec{i},\vec{j}\right)$:



1. Justifier que $\theta = 30°$.
2. On pose $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_x + \overrightarrow{P}_y$, où $\overrightarrow{P}_x$ et $\overrightarrow{P}_y$ sont les composantes de $\overrightarrow{P}$ suivant les axes (Gx) et (Gy).
   Calculer $\|\overrightarrow{P}_x\|$ et $\|\overrightarrow{P}_y\|$.
3. Décomposer suivant les axes du repère les vecteurs $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{P}$.
4. Le solide est en équilibre, cela signifie que $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{R}+\overrightarrow{T} = \vec{0}$.
   Montrer que $\|\overrightarrow{R}\| - \|\overrightarrow{P}\|\cos\theta = 0$ et $\|\overrightarrow{T}\| - \|\overrightarrow{P}\|\sin\theta = 0$
5. En déduire l'intensité des forces $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{T}$.

Exercice 17 *(Equation d'une médiatrice)*
Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(1;4)$ et $B(5;-4)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
2. On considère un point M appartenant à la médiatrice de $[AB]$. Déterminer $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.
3. On note $M(x;y)$ les coordonnées du point M.
   Montrer que les coordonnées du point M vérifient l'équation $x-2y-3=0$, appelée équation cartésienne de la droite (IM).
4. Déterminer l'équation réduite de la droite (IM).
5. Placer les points A et B dans un repère et tracer la droite (IM).

Exercice 18 *(Equation d'une hauteur)*
Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(4;2)$, $B(-3;4)$ et $C(-1;-2)$.

1. Soit M un point de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C. Déterminer $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. On note $M(x;y)$ les coordonnées du point M. Déterminer l'équation vérifiée par les coordonnées x ety du point M.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (CM).
4. Placer les points A, B et C dans un repère et tracer la droite (CM).

Exercice 19 *(Equation d'un cercle)*
On considère, dans un repère orthonormal, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3;4)$ et de rayon 2.

1. Soit $A(1;4)$ et $B(6;4)$. Montrer que le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

Déterminer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

3. On note $M(x; y)$ les coordonnées du point M. Déterminer l'équation vérifiée par les coordonnées x et$y$ du point M.

Exercice 20 $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un RON direct.

Soit A et B les points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associés aux angles $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

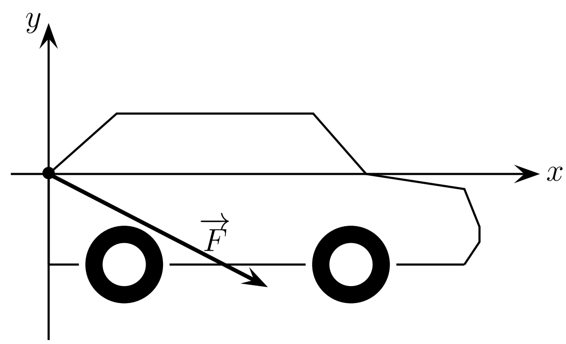
1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?
2. a) Quelles sont les coordonnées de A et B ?

   b) En déduire que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
3. a) Justifier que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \dfrac{\pi}{12}$.

   b) En déduire la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 21 Une personne pousse sa voiture en exercant une force de 200 N suivant une direction qui fait un angle de 25° avec le niveau horizontal de la route.

1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{F}$ suivant les deux axes orthogonaux $(Ox$ et (Oy).
2. Déterminer la norme de la force qui permet à la voiture d'avancer.



Exercice 22 $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le vecteur $\overrightarrow{DE}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{DA}$.
   Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}\right)$ en degré à $0,01$ près.