Dérivation des fonctions – Exercices

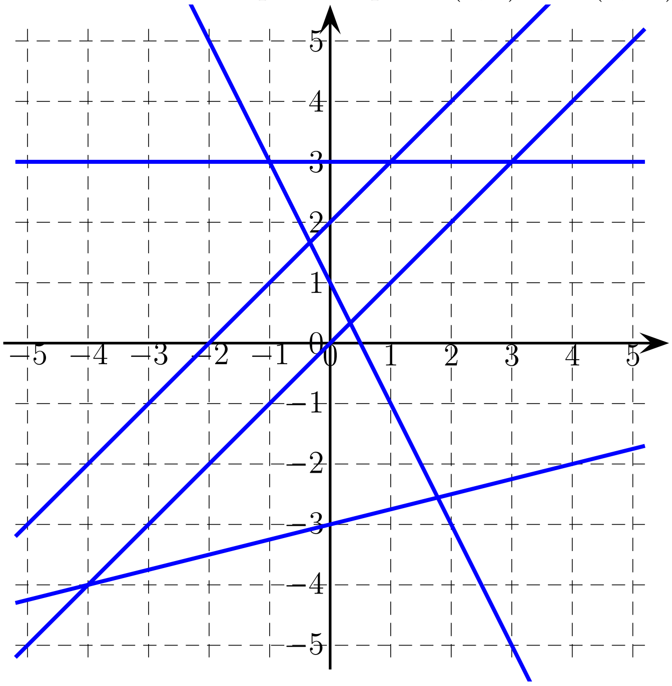
Exercice 1 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0;2)$; $B(1;1)$; $C(-2;4)$; $D(-3;29)$; $E(10;172)$; $F(125;30\,877)$.

Placer ces points dans un repère et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 Tracer les droites $D_1 : y = 2x + 1$, $D_2 : y = -x + 1$ et $D_3 : y = 2x + 3$.
Tracer la courbe représentative des fonctions définies par les expressions $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$, $h(x) = 2x - 1$.

Exercice 3 Déterminer l'équation de la droite D passant par $A(1;2)$ et $B(5;10)$.

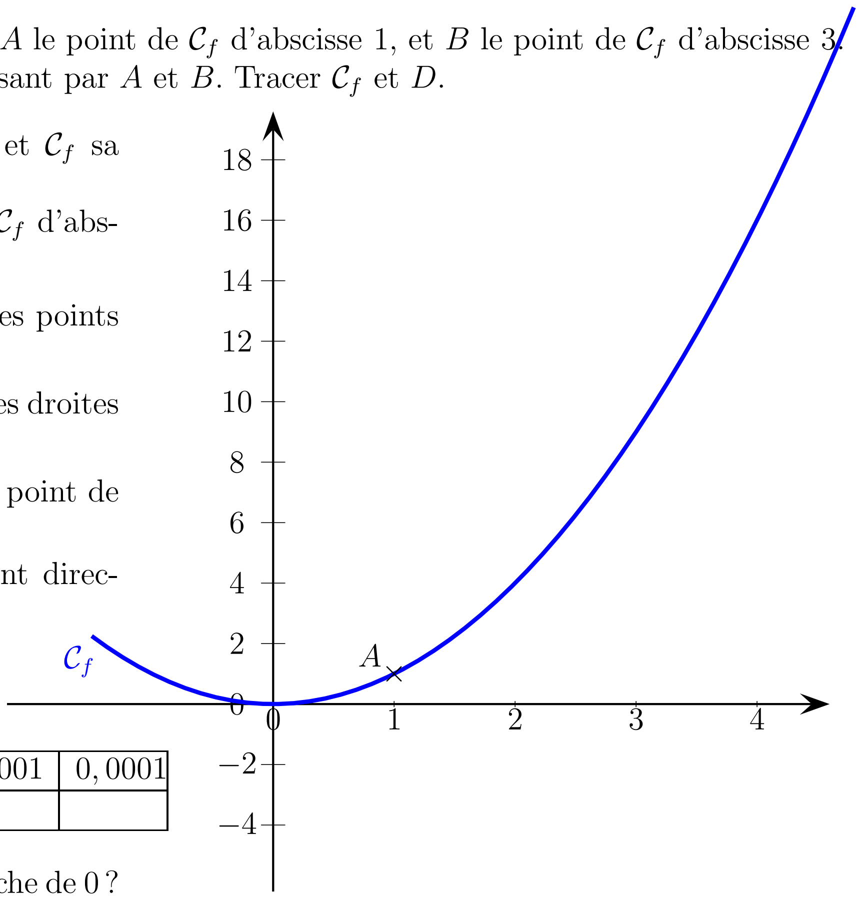
Exercice 4
Déterminer l'équation des droites.



Exercice 5 Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1, et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3.
Déterminer l'équation de la droite D passant par A et B. Tracer $\mathcal{C}_f$ et D.

Exercice 6 Soit f la fonction carré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.

1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :



h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a=1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2. a) Pour $h>0$, on pose $m_h=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
   Compléter le tableau :

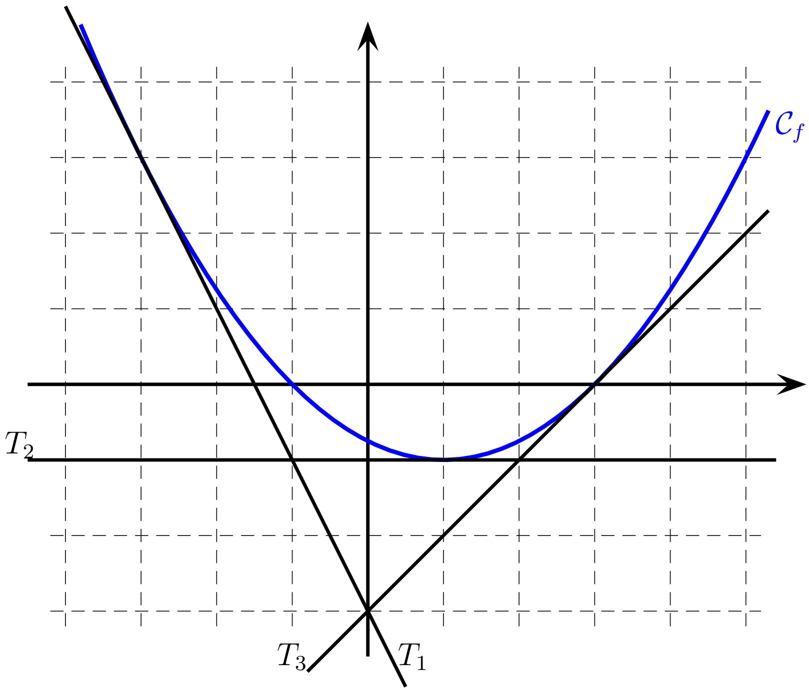
h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

   Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

   b) Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Exercice 8 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



Exercice 9 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$ b) $f(x)=3x$ c) $f(x)=\dfrac{5}{2}x$ d) $f(x)=x^2$

e) $f(x)=x^7$ f) $f(x)=2x^3$ g) $f(x)=3x+2$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=-x^2+x-\dfrac{7}{2}$ j) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

m) $f(x)=2x^5-\dfrac{x^3}{3}$ n) $f(x)=(3x+2)x^2$ o) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$ p) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

p) $f(x)=3\cos(x)$ n) $f(x)=\cos^2(x)$ o) $f(x)=\sin(2x+1)$ p) $f(x)=x\sin(2^2+1)$

Exercice 10 Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-2x$.

1. Donner le tableau de variation de f
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0=2$.
3. Donner de même les équations des tangentes en $x_0=-2$, $x_0=0$ et $x_0=1$.
4. Tracer dans un repère ces quatre droites et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11 Donner dans chacun des cas l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'absisse a :

1) $f(x)=x^3+8x-32$ en $a=2$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-x+2}$ en $a=1$ 3) $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 12 Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice précédent de a) à l) et des fonctions suivantes :

q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

t) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Déterminer les coordonnés de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 15 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-6		-2		1		4
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 16 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4		-1		1		2		4
f'	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 17 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v} .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Exercice 18 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2; 5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	10

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 19 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; 2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 20 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; 2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.