Correction du devoir surveillé

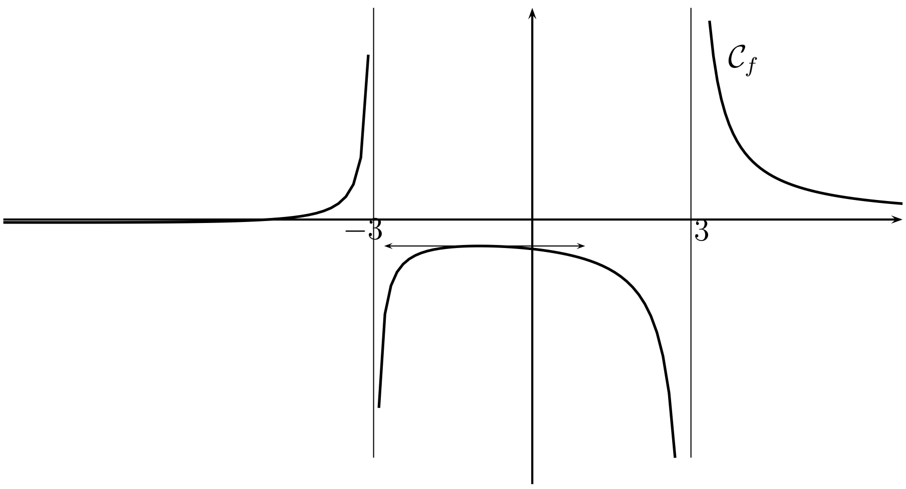
Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2-9}$.

Les fonctions $u : x \mapsto x+5$ et $v : x \mapsto x^2-9$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = x^2 - 9 = 0$ pour $x = 3$ et $x = -3$. La fonction f, quotient des fonctions u et v est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}\,, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{x^2+10x+9}{(x^2-9)^2}$$

Soit $P(x) = x^2 + 10x + 9$. -1 est une racine évidente de P, et comme le produit des racines est 9, on en déduit que la deuxième racine est 9.

x	$-\infty$		-9		-3		-1		3		$+\infty$
$x^2+10x+9$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x^2-9)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{-1}{18}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	



Exercice 2 Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+5x+4}{(x+2)^2}$, et $h : x \mapsto 2x+1$.

a) Les fonctions $u : x \mapsto 2x^2 + 5x + 4$ et $v : x \mapsto (x+2)^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = 0$ pour $x = -2$. La fonction g, quotient des fonctions u et v est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'x) = 4x + 5$, et $v'(x) = 2(x+2) = 2x+4$, et,

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\,, g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3x^2+8x+4}{(x+2)^4}$$

Soit $P(x) = 3x^2 + 8x + 4$. $\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2$: le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2+8x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+2)^4$		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

b) Soit $d(x) = g(x) - h(x)$, alors, pour tout $x \neq -2$,

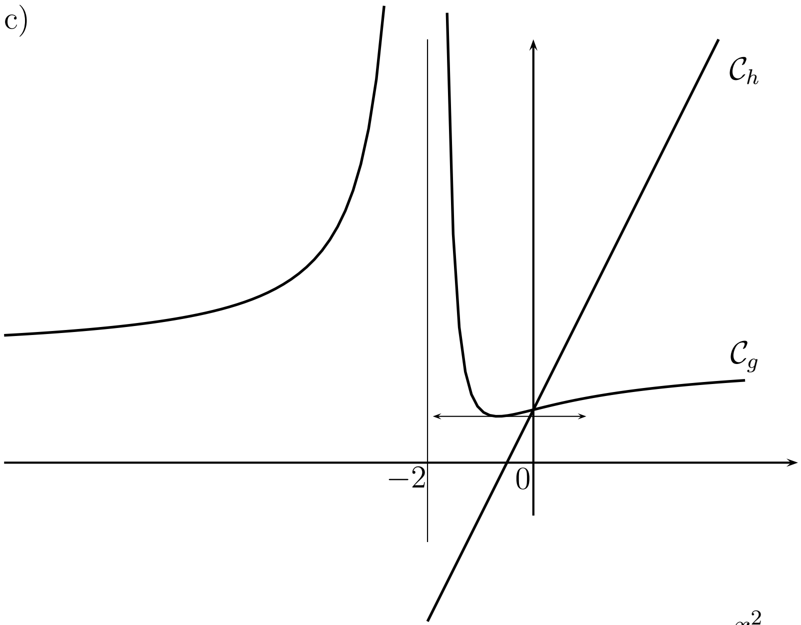
$$d(x) = \frac{2x^2+5x+4-(2x+1)(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{-2x^3-7x^2-7x}{(x+2)^2} = -x\frac{2x^2+7x+7}{(x+2)^2}$$

Soit $Q(x) = 2x^2+7x+7$. $\Delta = 49 - 56 < 0$: le trinôme n'admet aucune racine réelle.

c)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$d(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]-\infty;-2[\cup]-2;0[$, et est au dessous sur $]0;+\infty[$. Les deux courbes se coupent une unique fois en $x=0$.



Exercice 3 Soit $d(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. d est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme des fonctions $u : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto -\cos x$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = -x + \sin x$.

Afin d'étudier le signe de $d'(x)$ on peut la dériver :
$(d')'(x) = d''(x) = -1 + \cos x$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$, et donc, $d''(x) \leq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d''(x)$			$-$		
$d'(x)$		↘	0	↘	
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		↗	0	↘	

On en déduit que $d(x) \leq 0$ pour tout réel x, et donc que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.