Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors la courbe représentative de la fonction f coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant graphiquement f dans un repère.

1) Pour p un nombre réel, on note $(\mathcal{D}_p)$ la droite d'équation $y = x + p$.

   Pour quelles valeurs de p la droite $(\mathcal{D}_p)$ coupe-t-elle la parabole en un seul point ? en deux points disctincts ?

2) Pour m un nombre réel, on note (Δ_m) la droite d'équation $y = mx$.

   Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_p) coupe-t-elle la parabole en un unique point ?

Exercice 3 Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$.

M est un point de (AB), N est le symétrique de M par rapport à (AC) et P celui de N par rapport à (BC).

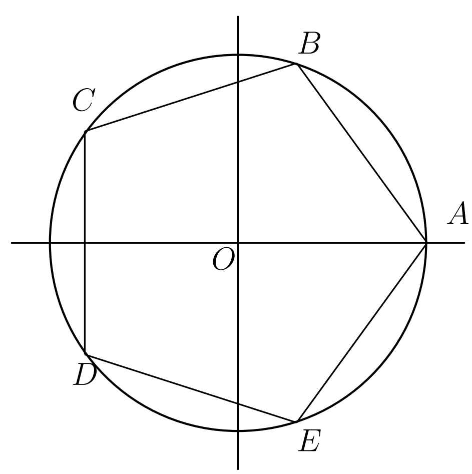
On souhaite démontrer que le triangle CMP est rectangle isocèle.

1) Justifier les égalités $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB})$.

2) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP})$. Conclure.

Exercice 4

$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.



1) Indiquer les mesures des angles :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \ , \ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \ , \ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) \ , \ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) \ .$$

2) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et E ?

3) Montrer la relation $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.

   On admettra de même la relation $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.

4) $ABCDE$ étant un pentagone régulier, on a (cette relation vectorielle n'est pas à démontrer) :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}\ .$$

   En déduire alors une relation reliant $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

5) On admet la formule de duplication : pour tout nombre réel a, $\cos(2a) = 2\left(\cos(2a)\right)^2 - 1$.

   a) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

   b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1) Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{2}{x-1}$

2) Donner le sens de variation de la fonction f.

3) On considère la droite (Δ) d'équation $y = -x+1$. Pour $x \in I$, on note P le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x, et Q le point de (Δ) d'abscisse x.
   a) Déterminer, en fonction de x, la distance algébrique PQ.
   b) Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) ?
   c) Que peut-on dire de la distance PQ lorsque x devient (très) grand ?

4) Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$.