

Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} = -1$; $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times (-1) - \frac{3}{2} = -2$;

2. $v_0 = u_0 + 3 = 4$; $v_1 = u_1 + 3 = 2$ et $v_2 = u_2 + 3 = 1$.

Exercice 2 On a $v_n = f(n)$ avec la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$.

On a $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x+1$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = 2x+1$ donc $v'(x) = 2$.

Ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \frac{1(2x+1) - (x+1)2}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ , et (v_n) est strictement décroissante sur \mathbb{N} .

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{2} - n \right) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{-n+1}{2} \right) = \frac{-n+1}{2^{n+1}}$

Or $-n+1 \leq 0$ dès que $n \geq 1$: (w_n) est décroissante pour $n \geq 1$.